Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 8: Convergenza e stabilità dei metodi alle differenze finite per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 1 (2° Prova Parziale 10 gennaio 2019)

Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

(a) $\eta_{k+1} = (1-2\delta)\eta_k + 2\delta\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$,

(b) $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{\beta h}{3}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2f(x_k + 2\alpha\beta h, \eta_k + 2\alpha\beta h f(x_k, \eta_k))\right]$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.

Soluzione

Lo schema (a) è multistep esplicito ed è stabile per $-\frac{1}{2} < \delta \leq \frac{1}{2}$. Lo schema (b) è monostep esplicito ed è stabile $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha inoltre ordine di convergenza 2 se $\alpha = \frac{25}{24}, \beta = \frac{3}{5}$.

Esercizio 2 (Seconda Prova Parziale 13 Gennaio 2022)

Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\beta - 2}\left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{2\beta}{\alpha}h, \eta_k + \frac{2\beta}{\alpha}hf(x_k, \eta_k)\right)\right]$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\delta \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = 4\delta\eta_k - (1 + 4\delta^2)\eta_{k-1} + h\left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right]$$

Soluzione

Il primo schema è monostep esplicito,quindi sempre stabile; è consistente e quindi convergente per $\beta = 4, \alpha \neq 0$. Inoltre è di ordine 2 per $\alpha = 8, \beta = 4$. Il secondo schema è multistep esplicito ed è stabile per $\delta = 0$.

Esercizio 3 (Seconda Prova Parziale 11 Gennaio 2023)
Identificare i due seguenti metodi alle differenze finite

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha-1}\left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + \frac{3\alpha}{\beta+1}h, \eta_k + \frac{3\alpha}{\beta+1}hf(x_k, \eta_k)\right)\right]$

(b) $\eta_{k+1} = (\gamma + \frac{3}{4})\eta_k - \frac{1}{4}\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\eta_{k-1} + h\left[f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1})\right]$,

Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il primo metodo è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine. Stabilire, inoltre, per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ il secondo metodo è stabile.

Soluzione
Il metodo (a) è monostep esplicito ed è stabile per $\alpha \neq 1$ e $\beta \neq -1$.E' consistente e quindi convergente per $\alpha = 3, \beta \neq -1$ ed è del secondo ordine per $\alpha = 3, \beta = 8$. Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile per $-\frac{3}{2} \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$.