Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 9: Esercizi Prima Prova Parziale: Serie e Trasformate di Fourier

Esercizio 1 (1° Prova Parziale 5 Novembre 2019)
Sviluppare in Serie di Fourier in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \\ \cos \pi x + 1 & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e dire se f è differenziabile termine a termine.

Soluzione
Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione è dato da

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi^2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cos k}{\pi^2 - 4k^2} \cos 2kx$$

ed è differenziabile termine a termine.

Esercizio 2 (1° Prova Parziale 5 Novembre 2019)
Risolvere, ricorrendo alla Serie di Fourier, le seguenti equazioni differenziabili

$$y'' + 5y = f(x), \qquad y' + 5y = f(x) \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

con $f(x)$ la funzione dell'esercizio precedente.

Soluzione
La soluzione della prima equazione differenziale è

$$S_y(x) = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos 2kx$$

con $\tilde{a}_0 = \frac{a_0}{5}, \tilde{a}_k = \frac{a_k}{5-4k^2}$, dove a_0, a_k sono i coefficienti trovati nell'esericizio 1.

La soluzione della seconda equazione differenziale è

$$S_y(x) = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos 2kx + \tilde{b}_k \sin 2kx$$

con $\tilde{a}_0 = \frac{a_0}{5}, \tilde{a}_k = \frac{5a_k}{25+4k^2}, \tilde{b}_k = \frac{2ka_k}{25+4k^2}$, dove a_0, a_k sono quelli trovati nell'esericizio 1.

Esercizio 3 (Recupero 1° Prova Intermedia 25 Gennaio 2023)
Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{ik}(k-2)}{k^2-4k+9}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2x-2)}{(x-1)e^{-3ix}}\right\}$$

Soluzione
Le soluzioni sono

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{ik}(k-2)}{k^2-4k+9}\right\} = \frac{ie^{2i(1+x)}}{2}[e^{-\sqrt{5}(x+1)}H(x+1) - e^{-\sqrt{5}(x+1)}H(-x-1)]$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2x-2)}{(x-1)e^{-3ix}}\right\} = \pi e^{-i(k-3)}[H(5-k) - H(1-k)]$$

Esercizio 4 (1° Prova Parziale 12 Novembre 2018)
Risolvere, risolvendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' - 5y = H(x-4) - H(x-8), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Soluzione La soluzione è pari a

$$y = \begin{cases} \frac{e^{5x}}{5}(e^{-40} - e^{-20}) & x < 4 \\ \frac{1}{5}(e^{5x-40} - 1) & 4 \leq x \leq 8 \\ 0 & x > 8 \end{cases}$$