Nome e cognome: ....

Matricola: ....

Prova scritta di Geometria e Algebra
14 giugno 2022 versione A

1.
- Si dia la definizione di applicazione lineare.
- Si dia la definizione di matrice invertibile e si enunci la condizione necessaria e sufficiente di invertibilità.
- Si indichi la formula per calcolare il modulo di un numero complesso $z = a + ib$.

Soluzione.

- Una funzione $f : V \to W$ tra spazi vettoriali si dice applicazione lineare se verifica le due seguenti proprietà:

$$f(v + w) = f(v) + f(w), \quad \text{per ogni } v, w \in V,$$

$$f(cv) = cf(v), \quad \text{per ogni } v \in V, \text{ per ogni } c \in \mathbb{K}.$$

- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ quadrata di ordine n si dice invertibile se esiste una matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$AB = I_n, \quad BA = I_n$$

  dove I_n è la matrice identità. In tal caso, B si chiama matrice inversa di A e si denota A^{-1}.
  Una matrice A è invertibile se e solo se il rango di A è uguale a n, o equivalentemente se e solo se il determinante di A è diverso da zero.
- Il modulo di un numero complesso $z = a + ib$ è dato da $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + kx_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 6x_2 + kx_3 + 3x_4 = 2k \\ -x_1 - 3x_2 + (k-2)x_4 = 3 \end{cases}$$

Soluzione.

- $k = 0$, $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$, sistema incompatibile
- $k \neq 0$, $r(A) = r(A|b) = 3$, ∞^1 soluzioni,
  $\mathbf{x} = \left[-2k - 2 + (k-1)t, \frac{2k-1-t}{3}, \frac{4}{k} - t, t\right]^T, \ t \in \mathbb{R}$

3. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare il nucleo di f. Determinare una base per l'immagine di f. Specificare $\dim(N(f))$ e $\dim(Im(f))$. Dire se f è un'applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi.

Soluzione.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N(f) = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(N(f)) = 0$$

$$B_{Im(f)} = \left\{[1,2,1]^T, [0,1,-3]^T, [2,-1,0]^T\right\}, \quad \dim(Im(f)) = 3$$

L'applicazione lineare è biettiva.

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -5/7 & 2/7 \\ 0 & -3/7 & 4/7 \\ 0 & 2/7 & -5/7 \end{bmatrix}$$

Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = -1, \quad V_{-1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_2 = -7, \quad V_{-7} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4t/3 \\ 2t \\ t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

A non è diagonalizzabile perché $m_{alg}(\lambda_1) \neq m_{geo}(\lambda_1)$.

5. Mediante il procedimento di Gram-Schmidt, si trovi una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = [2, 1, 0, 0]^T, \qquad \mathbf{v}_2 = [-3, 0, 1, 0]^T, \qquad \mathbf{v}_3 = [-2, 0, 0, 1]^T.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0\right]^T, \\
\mathbf{w}_2 &= \left[-\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{14}}, \frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{5}{14}}, 0\right]^T, \\
\mathbf{w}_3 &= \left[-\frac{\sqrt{7}}{21}, \frac{2\sqrt{7}}{21}, -\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{3}\right]^T.
\end{aligned}$$