

Nome e cognome:

Matricola:

Prova scritta di Geometria e Algebra

14 giugno 2022 versione B

1.
 - Si dia la definizione di applicazione lineare.
 - Si dia la definizione di matrice invertibile e si enunci la condizione necessaria e sufficiente di invertibilità.
 - Si indichi la formula per calcolare il modulo di un numero complesso $z = a + ib$.

Soluzione.

- Una funzione $f : V \rightarrow W$ tra spazi vettoriali si dice applicazione lineare se verifica le due seguenti proprietà:

$$f(v + w) = f(v) + f(w), \quad \text{per ogni } v, w \in V,$$

$$f(cv) = cf(v), \quad \text{per ogni } v \in V, \text{ per ogni } c \in \mathbb{K}.$$

- Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrata di ordine n si dice invertibile se esiste una matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$AB = I_n, \quad BA = I_n$$

dove I_n è la matrice identità. In tal caso, B si chiama matrice inversa di A e si denota A^{-1} .

Una matrice A è invertibile se e solo se il rango di A è uguale a n , o equivalentemente se e solo se il determinante di A è diverso da zero.

- Il modulo di un numero complesso $z = a + ib$ è dato da $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss-Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 + kx_4 = 2k \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + kx_4 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + (k - 2)x_3 = 3 \end{cases}$$

Soluzione.

- $k = 0$, $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$, sistema incompatibile
- $k \neq 0$, $r(A) = r(A|b) = 3$, ∞^1 soluzioni,

$$\mathbf{x} = \left[-2k + 2 - \frac{4}{k} + (1 - k)t, \frac{2k - 1 - 4/k + t}{3}, \frac{4}{k} - t, t \right]^T, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 . Determinare il nucleo di f . Determinare una base per l'immagine di f . Specificare $\dim(N(f))$ e $\dim(Im(f))$. Dire se f è un'applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi.

Soluzione.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$N(f) = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(N(f)) = 0$$

$$B_{Im(f)} = \{[1, 2, 0]^T, [1, -1, 1]^T, [0, 1, -3]^T\}, \quad \dim(Im(f)) = 3$$

L'applicazione lineare è biettiva.

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1} . Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori.

Soluzione.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 5/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = 1, \quad V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \\ -2t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_2 = 4, \quad V_4 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3t/2 \\ t \\ 5t/2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_3 = -1, \quad V_{-1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Base di autovettori

$$\{[3, 1, -2]^T, [3/2, 1, 5/2]^T, [-1, 1, 0]^T\}.$$

5. Mediante il procedimento di Gram-Schmidt, si trovi una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) del sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = [-3, 0, 1, 0]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [2, 1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [-2, 0, 0, 1]^T.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \left[-\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 \right]^T, \\ \mathbf{w}_2 &= \left[\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \sqrt{\frac{5}{7}}, \frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, 0 \right]^T, \\ \mathbf{w}_3 &= \left[-\frac{\sqrt{7}}{21}, \frac{2\sqrt{7}}{21}, -\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{3} \right]^T.\end{aligned}$$