Nome e cognome: ....

Matricola: ....

Prova scritta di Geometria e Algebra

29 giugno 2022

1.
- Si dia la definizione di autovettore di un endomorfismo f.
- Si dia la definizione di vettori linearmente indipendenti.
- Si dia la definizione di rango di una matrice.

Soluzione.

- Un autovettore di un endomorfismo $f : V \to V$ è un vettore v non nullo tale che $f(v) = \lambda v$, per un certo scalare λ, detto autovalore associato a v.
- Dei vettori $v_1, \dots, v_n$ in uno spazio vettoriale V si dicono linearmente indipendenti se nessuno di loro può essere scritto come combinazione lineare dei rimanenti, o equivalentemente se l'unica combinazione lineare nulla $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$ è quella con coefficienti $c_1, \dots, c_n$ tutti uguali a zero.
- Si dice rango di una matrice il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti.

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + kx_3 = 7 \\ 2x_1 - kx_2 + 5x_3 = k \end{cases}$$

Soluzione.

- $k = 3$, $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$, sistema incompatibile
- $k = -3$, $r(A) = r(A|b) = 2$, ∞^1 soluzioni, $\mathbf{x} = \left[\frac{9}{4} + \frac{t}{2}, -\frac{5}{2} - 2t, t\right]^T, \ t \in \mathbb{R}$
- $k \neq 3$ e $k \neq -3$, $r(A) = r(A|b) = 3$, unica soluzione, $\mathbf{x} = \left[\frac{3(k-5)}{2(k-3)}, \frac{6-k}{k-3}, \frac{3}{k-3}\right]^T$

3. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \\ 3x_1 + x_2 + kx_3 - x_4 \end{bmatrix}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini il nucleo di f, la sua dimensione e una sua base. Si dica se esiste qualche valore di k per cui f sia iniettiva. Infine, fissato $k = 1$, si determini la $\dim(Im(f))$ e si dica se l'applicazione lineare è iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi.

Soluzione.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & k & -1 \end{bmatrix}$$

- $k \neq 5$, $N(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \mathbf{v} = [t, -2t, 0, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(N(f)) = 1$, $B_{N(f)} = \{[1, -2, 0, 1]^T\}$
- $k = 5$, $N(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \mathbf{v} = [t - 2s, s - 2t, s, t]^T, \ s, t \in \mathbb{R}\}$, $\dim(N(f)) = 2$, $B_{N(f)} = \{[-2, 1, 1, 0]^T, [1, -2, 0, 1]^T\}$

Non esistono k per cui f è iniettiva.
$k = 1$, $\dim(Im(f)) = 3$, suriettiva.

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione.

$$\det(A) = -5 \neq 0, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2/5 & -2/5 \\ 2 & -1/5 & 6/5 \\ 2 & -2/5 & 7/5 \end{bmatrix}$$

Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = -1, \quad V_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [-t, t, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda_2 = 1, \quad V_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [0, t, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad V_5 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [-t, -2t, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\}$$

A è diagonalizzabile. Base di autovettori

$$\{[-1, 1, 1]^T, [0, 1, 1]^T, [-1, -2, 1]^T\}.$$

5.
- Si scrivano l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza centrata nel punto $C = (5, 1)$ e di raggio $r = 4$. Si dica se la retta di equazione cartesiana $y = 1$ interseca la circonferenza in un punto, in due punti oppure in nessun punto e determinare gli eventuali punti di intersezione.

- Trovare il punto di intersezione tra le rette $x + y - 1 = 0$ e $2x - y - 2 = 0$.
- Calcolare la distanza tra il punto $P = (7, -1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$.

Soluzione.

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 16 \qquad \text{eq. cartesiana}$$

$$\begin{cases} x = 5 + 4\cos\theta \\ y = 1 + 4\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta < 2\pi \qquad \text{eq. parametrica}$$

La retta interseca la circonferenza in due punti $A = (1, 1)$ e $B = (9, 1)$. Le due rette si intersecano nel punto $(1, 0)$. La distanza tra il punto e la retta è $d = \frac{13}{\sqrt{5}}$.