Nome e cognome: ....

Matricola: ....

Prova scritta di Geometria e Algebra

19 luglio 2022

1.
- Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale.
- Si enunci il teorema della dimensione (o teorema di nullità più rango).
- Si scriva un esempio di matrice triangolare superiore di ordine 4.

Soluzione.

- Un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V che siano anche linearmente indipendenti si dice base dello spazio vettoriale V.
- Teorema: Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con $\dim(V)$ finita. Allora $\dim(N(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V)$.
- $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -6/5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + kx_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = k \end{cases}$$

Soluzione.

- $k = 5$, $r(A) = r(A|b) = 2$, ∞^1 soluzioni, $\mathbf{x} = \left[-\frac{1+8t}{3}, \frac{4-t}{3}, t\right]^T$, $t \in \mathbb{R}$
- $k \neq 5$, $r(A) = r(A|b) = 3$, unica soluzione, $\mathbf{x} = \left[-\frac{4+k}{3}, \frac{k-2}{3}, 1\right]^T$

3. Date le due applicazioni lineari

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

per entrambe scrivere la matrice associata rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Si determini il nucleo di f, una base del nucleo, le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f. Si dica se f è iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi.

Si determini il nucleo di g, le dimensioni del nucleo e dell'immagine di g. Si dica se g è iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi.
Infine, si scriva la composizione $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Soluzione.

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$N(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = [-2t, 3t, t]^T, t \in \mathbb{R}\}$, $B_{N(f)} = \{[-2, 3, 1]^T\}$, $\dim(N(f)) = 1$, $\dim(Im(f)) = 2$, f è suriettiva.
$N(g) = \{\mathbf{0}\}$, $\dim(N(g)) = 0$, $\dim(Im(g)) = 2$, g è iniettiva.

$$\begin{aligned} f \circ g :\ & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione. $\det(A) = 0$, A non è invertibile.
Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = 0, \quad V_0 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [-2t, t, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\lambda_2 = -2, \quad V_{-2} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [-t, 0, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\lambda_3 = 1, \quad V_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [-t, t, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

A è diagonalizzabile. Base di autovettori

$$\{[-2, 1, 1]^T, [-1, 0, 1]^T, [-1, 1, 1]^T\}$$

5.
- Si scrivano l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza centrata nel punto $C = (-2, 4)$ e di raggio $r = 5$. Si dica se la retta di equazione cartesiana $y = -x + 1$ interseca la circonferenza in un punto, in due punti oppure in nessun punto e determinare gli eventuali punti di intersezione.
- Trovare il punto di intersezione tra le rette $x + y - 1 = 0$ e $-2x + y - 4 = 0$.

- Calcolare la distanza tra il punto $P = (7, -1)$ e la retta di equazione $2x - y = 2$.

Soluzione.

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25 \qquad \text{eq. cartesiama}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 5\cos\theta \\ y = 4 + 5\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{eq. parametriche}$$

La retta interseca la circonferenza in due punti $A = (1, 0)$ e $B = (-6, 7)$. Le due rette si intersecano nel punto $(-1, 2)$. La distanza tra il punto e la retta è $d = \frac{13}{\sqrt{5}}$.