Nome e cognome: ....

Matricola: ....

Prova scritta di Geometria e Algebra

13 settembre 2022

1.
- Si dia la definizione di applicazione lineare.
- Si dica quando un'applicazione lineare è suriettiva e quando è iniettiva.
- Si scriva un esempio di matrice triangolare inferiore di ordine 4.

Soluzione.

- Una funzione $f : V \to W$ tra spazi vettoriali si dice applicazione lineare se verifica le due seguenti proprietà:
$$f(v+w) = f(v) + f(w), \quad \text{per ogni } v, w \in V,$$
$$f(cv) = cf(v), \quad \text{per ogni } v \in V, \text{ per ogni } c \in \mathbb{K}.$$
- Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è suriettiva se e solo se $Im(f) = W$, o equivalentemente $\dim(Im(f)) = \dim(W)$. Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $N(f) = \{0\}$, o equivalentemente $\dim(N(f)) = 0$.
- $$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -6/5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Soluzione.

- $k \neq 4$ e $k \neq -2$, $r(A) = r(A|b) = 3$, unica soluzione, $\mathbf{x} = \left[-\frac{3}{k-4}, -\frac{2(k-1)}{k-4}, \frac{3}{k-4}\right]^T$
- $k = 4$ e $k \neq -2$, $r(A) = 2$, $r(A|b) = 3$, sistema incompatibile
- $k \neq 4$ e $k = -2$, $r(A) = r(A|b) = 2$, ∞^1 soluzioni, $\mathbf{x} = [5t+3, -8t-5, t]^T$, $t \in \mathbb{R}$

3. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Determinare il nucleo di f, una base per il nucleo di f e specificare $\dim(N(f))$ e $\dim(Im(f))$. Dire se f è un'applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi. Infine, sia g l'applicazione lineare definita da

$$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Scrivere la composizione $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Soluzione.

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$N(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = [t, 0, t]^T, t \in \mathbb{R}\}$, $B_{N(f)} = \{[1, 0, 1]^T\}$, $\dim(N(f)) = 1$, $\dim(Im(f)) = 2$, f è suriettiva.

$$f \circ g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione.

$$\det(A) = 16, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 3/8 \end{bmatrix}$$

Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = 2, \quad V_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [t, s, s]^T, \ t, s \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\lambda_2 = 4, \quad V_4 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [0, -t, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

$m_{alg}(\lambda_1) = m_{geo}(\lambda_1) = 2$, $m_{alg}(\lambda_2) = m_{geo}(\lambda_2) = 1$, A è diagonalizzabile.
Base di autovettori

$$\{[1,0,0]^T, [0,1,1]^T, [0,-1,1]^T\}$$

5.

- Dati i tre vettori

$$\mathbf{u} = [1,-2,4]^T, \qquad \mathbf{v} = [0,2,6]^T, \qquad \mathbf{w} = [1,-3,1]^T,$$

  verificare se sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti. Calcolare la norma dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Dire se tra di loro ci sono vettori ortogonali.

- Si scrivano l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza centrata nel punto $C = (1,4)$ e di raggio $r = 5$. Si dica se la retta di equazione cartesiana $x + y - 4 = 0$ interseca la circonferenza in un punto, in due punti oppure in nessun punto e determinare gli eventuali punti di intersezione.

Soluzione. I tre vettori sono lin. dipendenti. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{10}$, $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{11}$.
I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali.

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25 \qquad \text{eq. cartesiama}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 5\cos\theta \\ y = 4 + 5\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{eq. parametriche}$$

La retta interseca la circonferenza in due punti $A = (4,0)$ e $B = (-3,7)$.