Nome e cognome: ....

Matricola: ....

Prova scritta di Geometria e Algebra

9 gennaio 2023

1.
- Si dia la definizione di applicazione lineare.
- Si dica quando un'applicazione lineare è suriettiva e quando è iniettiva.
- Si enunci il teorema della dimensione (o teorema di nullità più rango).

Soluzione.

- Una funzione $f : V \to W$ tra spazi vettoriali si dice applicazione lineare se verifica le due seguenti proprietà:

$$f(v+w) = f(v) + f(w), \quad \text{per ogni } v, w \in V,$$

$$f(cv) = cf(v), \quad \text{per ogni } v \in V, \text{ per ogni } c \in \mathbb{K}.$$

- Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è suriettiva se e solo se $Im(f) = W$, o equivalentemente $\dim(Im(f)) = \dim(W)$. Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $N(f) = \{0\}$, o equivalentemente $\dim(N(f)) = 0$.
- Teorema: Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con $\dim(V)$ finita. Allora $\dim(N(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V)$.

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + kx_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = k \end{cases}$$

Soluzione.

- $k = 5$, $r(A) = r(A|b) = 2$, ∞^1 soluzioni, $\mathbf{x} = \left[-\frac{1+8t}{3}, \frac{4-t}{3}, t\right]^T$, $t \in \mathbb{R}$
- $k \neq 5$, $r(A) = r(A|b) = 3$, unica soluzione, $\mathbf{x} = \left[-\frac{4+k}{3}, \frac{k-2}{3}, 1\right]^T$

3. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare il nucleo di f. Determinare una base per l'immagine di f. Specificare $\dim(N(f))$ e $\dim(Im(f))$. Dire se f è un'applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi. Infine, data l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} g :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

scrivere la composizione $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Soluzione.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N(f) = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim(N(f)) = 0$$

$$B_{Im(f)} = \left\{[0,2,0]^T, [1,1,-1]^T, [1,0,0]^T\right\}, \quad \dim(Im(f)) = 3$$

L'applicazione lineare f è biettiva.

$$\begin{aligned} g \circ f :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione. $\det(A) = 0$, A non è invertibile.
Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = 0, \quad m_{alg}(0) = 1, \quad V_0 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\ \mathbf{x} = [t,0,t]^T,\ t \in \mathbb{R}\right\}, \quad m_{geo}(0) = 1$$

$$\lambda_2 = 2, \quad m_{alg}(2) = 2 \quad V_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ :\ \mathbf{x} = [-t,0,t]^T,\ t \in \mathbb{R}\right\}, \quad m_{geo}(2) = 1$$

A non è diagonalizzabile in quanto $m_{alg}(\lambda_2) \neq m_{geo}(\lambda_2)$.

5.

- Dati i tre vettori

$$\mathbf{u} = [1,-3,1]^T, \qquad \mathbf{v} = [6,2,0]^T, \qquad \mathbf{w} = [-1,0,-1]^T,$$

verificare se sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti. Calcolare la norma dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Dire se tra di loro ci sono vettori ortogonali.

- Si scrivano l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza centrata nel punto $C = (3, 2)$ e di raggio $r = 6$. Si dica se la retta di equazione cartesiana $x - y - 7 = 0$ interseca la circonferenza in un punto, in due punti oppure in nessun punto e determinare gli eventuali punti di intersezione.

Soluzione. I tre vettori sono lin. indipendenti. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{11}$, $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{10}$, $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2}$. I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali.

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 36 \qquad \text{eq. cartesiama}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 6\cos\theta \\ y = 2 + 6\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{eq. parametriche}$$

La retta interseca la circonferenza in due punti $A = (3, -4)$ e $B = (9, 2)$.