Nome e cognome: ....

Matricola: ....

Prova scritta di Geometria e Algebra

23 gennaio 2023

1.
- Si dia la definizione di vettori linearmente indipendenti.
- Si dia la definizione di rango di una matrice.
- Si scriva un esempio di matrice simmetrica di ordine 4.

Soluzione.

- Dei vettori $v_1, \dots, v_n$ in uno spazio vettoriale V si dicono linearmente indipendenti se nessuno di loro può essere scritto come combinazione lineare dei rimanenti, o equivalentemente se l'unica combinazione lineare nulla $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$ è quella con coefficienti $c_1, \dots, c_n$ tutti uguali a zero.
- Si dice rango di una matrice il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti.
- $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1/2 \\ -5 & 3/2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 6 & 10 \\ 1/2 & 6 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k \\ kx_1 + kx_2 + k^2x_3 = 4 \end{cases}$$

Soluzione.

- $k \neq \pm 2$, $r(A) \neq r(A|b)$, incompatibile
- $k = 2$, $r(A) = r(A|b) = 2$, ∞^1 soluzioni, $\mathbf{x} = [-t, -t+2, t]^T$, $t \in \mathbb{R}$
- $k = -2$, $r(A) = r(A|b) = 2$, ∞^1 soluzioni, $\mathbf{x} = [7t, -5t-2, t]^T$, $t \in \mathbb{R}$

3. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare il nucleo di f. Determinare una base per il nucleo di f. Specificare $\dim(N(f))$ e $\dim(Im(f))$. Dire se f è un'applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi. Infine, data l'applicazione lineare

$$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} y_1 + y_2 - y_3 \\ 2y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

scrivere la composizione $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Soluzione.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = [t, -t, t]^T, t \in \mathbb{R}\}, \quad B_{N(f)} = \{[1, -1, 1]^T\},$$
$$\dim(N(f)) = 1, \qquad \dim(Im(f)) = 2$$

L'applicazione lineare f non è né iniettiva né suriettiva.

$$g \circ f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione.

$$\det(A) = 2, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = 1/2, \quad V_{1/2} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [0, 0, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$
$$\lambda_2 = 1, \quad V_1 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [-2t, t, 0]^T, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$
$$\lambda_3 = 4, \quad V_4 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [t, t, 6t/7]^T, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

Base di autovettori

$$\{[0, 0, 1]^T, [-2, 1, 0]^T, [1, 1, 6/7]^T\}$$

5. • Dati i tre vettori

$$\mathbf{u} = [1, 1, 2]^T, \qquad \mathbf{v} = [3, -1, 4]^T, \qquad \mathbf{w} = [-2, 0, 1]^T,$$

verificare se sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti. Calcolare la norma dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Dire se tra di loro ci sono vettori ortogonali.

• Si scrivano l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza centrata nel punto $C = (-2, 4)$ e di raggio $r = 5$. Si dica se la retta di equazione cartesiana $x + y - 1 = 0$ interseca la circonferenza in un punto, in due punti oppure in nessun punto e determinare gli eventuali punti di intersezione.

Soluzione. I tre vettori sono lin. indipendenti. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{26}$, $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{5}$. I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali.

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25 \qquad \text{eq. cartesiama}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 5\cos\theta \\ y = 4 + 5\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta < 2\pi \qquad \text{eq. parametriche}$$

La retta interseca la circonferenza in due punti $A = (1, 0)$ e $B = (-6, 7)$.