Nome e cognome: ....

Matricola: ....

Prova scritta di Geometria e Algebra
6 febbraio 2023

1.

- Si dia la definizione di autovettore di un endomorfismo f.
- Si dia la definizione di rango di una matrice.
- Si scriva un esempio di matrice simmetrica di ordine 4.

Soluzione.

- Un autovettore di un endomorfismo $f : V \to V$ è un vettore v non nullo tale che $f(v) = \lambda v$, per un certo scalare λ, detto autovalore associato a v.
- Si dice rango di una matrice il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti.
- $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1/2 \\ -5 & 3/2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 6 & 10 \\ 1/2 & 6 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - kx_3 = -1 \\ x_1 + kx_3 = -2 \\ kx_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Soluzione.

- $k \neq \pm 1$, $r(A) = r(A|b) = 3$, unica soluzione, $\mathbf{x} = \left[-\frac{2}{1-k}, -\frac{1+3k}{2(1-k)}, \frac{2}{1-k}\right]^T$
- $k = 1$, $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$, sistema incompatibile
- $k = -1$, $r(A) = r(A|b) = 2$, ∞^1 soluzioni, $\mathbf{x} = \left[t-2, t-\frac{1}{2}, t\right]^T$, $t \in \mathbb{R}$

3. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare il nucleo di f. Determinare una base per il nucleo di f. Specificare $\dim(N(f))$ e $\dim(Im(f))$. Dire se f è un'applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi. Infine, data l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} g:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_1 - y_2 + 3y_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

scrivere la composizione $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Soluzione.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = [-t, -t, t]^T, t \in \mathbb{R}\}, \quad B_{N(f)} = \{[-1, -1, 1]^T\},$$
$$\dim(N(f)) = 1, \qquad \dim(Im(f)) = 2$$

L'applicazione lineare f non è né iniettiva né suriettiva.

$$\begin{aligned} g \circ f:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione.

$$\det(A) = 16, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 3/8 \end{bmatrix}$$

Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = 2, \quad V_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [t, s, s]^T, \ t, s \in \mathbb{R}\right\}$$
$$\lambda_2 = 4, \quad V_4 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = [0, -t, t]^T, \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

$m_{alg}(\lambda_1) = m_{geo}(\lambda_1) = 2$, $m_{alg}(\lambda_2) = m_{geo}(\lambda_2) = 1$, A è diagonalizzabile.
Base di autovettori

$$\{[1, 0, 0]^T, [0, 1, 1]^T, [0, -1, 1]^T\}$$

5. • Dati i tre vettori

$$\mathbf{u} = \left[1, \frac{1}{2}, 0\right]^T, \qquad \mathbf{v} = \left[-5, 6, \frac{1}{3}\right]^T, \qquad \mathbf{w} = [0, -2, 1]^T,$$

verificare se sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti. Calcolare la norma dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Dire se tra di loro ci sono vettori ortogonali.

• Si scrivano l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza centrata nel punto $C = (3, -1)$ e di raggio $r = 2$. Si dica se la retta di equazione cartesiana $x + y = 0$ interseca la circonferenza in un punto, in due punti oppure in nessun punto e determinare gli eventuali punti di intersezione.

Soluzione. I tre vettori sono lin. indipendenti. $\|\mathbf{u}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\|\mathbf{v}\| = \frac{5\sqrt{22}}{3}$, $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{5}$. Non ci sono vettori tra loro ortogonali.

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4 \qquad \text{eq. cartesiama}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \\ y = -1 + 2\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta < 2\pi \qquad \text{eq. parametriche}$$

La retta interseca la circonferenza in due punti $A = (1, -1)$ e $B = (3, -3)$.