Altri esempi di applicazioni lineari

1 Esempi

Esempio 1.1. Sia $a \in \mathbb{R}$ fissato.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

è un'applicazione lineare, infatti valgono le due proprietà della definizione di applicazione lineare:

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y), \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R},$$
$$f(cx) = a(cx) = c(ax) = cf(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1.2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x+1 \end{aligned}$$

non è un'applicazione lineare, in quanto:

$$f(x+y) = 2(x+y) + 1 = 2x + 2y + 1,$$
$$f(x) + f(y) = (2x+1) + (2y+1) = 2x + 2y + 2.$$

Esempio 1.3.

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

è un'applicazione lineare, infatti

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2(x_1+y_1) \\ (x_1+y_1) - (x_2+y_2) \\ -(x_2+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 \\ y_1 - y_2 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$
$$= f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \qquad \text{per ogni } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$f\left(c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2cx_1 \\ cx_1 - cx_2 \\ -cx_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 - x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = cf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \qquad \text{per ogni } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, c \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.1. Le funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono applicazioni lineari se le componenti del vettore in $\mathbb{R}^m$ sono polinomi omogenei di grado 1 nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, come negli Esempi 1.1 e 1.3. Nell'Esempio 1.2 e nel prossimo Esempio 1.4, le componenti non sono polinomi omogenei (infatti non sono applicazioni lineari).

Esempio 1.4.

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} 2x_1+1 \\ x_1 - x_2 \\ -x_2 - 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

non è un'applicazione lineare, infatti si verifica che

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \neq f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right).$$

Consideriamo ora funzioni tra altri spazi vettoriali.

Esempio 1.5. Sia $\mathbb{R}^{m\times n}$ lo spazio vettoriale delle matrici di dimensione $m \times n$. L'applicazione

$$\begin{aligned} T:\ \mathbb{R}^{m\times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m} \\ A &\longmapsto T(A) = A^T \end{aligned}$$

dove A^T è la trasposta di A, è un'applicazione lineare. Infatti:

$$T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B), \qquad \text{per ogni } A, B \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$T(cA) = (cA)^T = cA^T = cT(A), \qquad \text{per ogni } A \in \mathbb{R}^{m\times n}, c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1.6. Sia $C^1[(a,b)]$ lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili con derivata continua sull'intervallo (a,b) e sia $C^0[(a,b)]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su (a,b). L'applicazione

$$\begin{aligned} D:\ C^1[(a,b)] &\longrightarrow C^0[(a,b)] \\ f &\longmapsto D(f) = f' \end{aligned}$$

dove f' è la derivata della funzione f, è un'applicazione lineare. Questo è vero per via delle proprietà della derivata della somma di due funzioni e del prodotto di una costante per una funzione:

$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g), \qquad \text{per ogni } f, g \in C^1[(a,b)],$$

$$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f), \qquad \text{per ogni } f \in C^1[(a,b)], c \in \mathbb{R}.$$

2 Matrice associata

Esempio 2.1. Consideriamo l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

Sia $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $B' = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Troviamo la matrice associata ad f rispetto a tali basi:

$$f(\mathbf{e}_1) = [1, 2]^T = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$$
$$f(\mathbf{e}_2) = [1, 0]^T = \mathbf{b}_1$$
$$f(\mathbf{e}_3) = [-1, 1]^T = -\mathbf{b}_\mathbf{1} + \mathbf{b}_2$$

Quindi

$$M_{B,B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove nella prima colonna abbiamo scritto le componenti di $f(\mathbf{e}_1)$ rispetto a B', nella seconda colonna abbiamo scritto le componenti di $f(\mathbf{e}_2)$ rispetto a B' e nella terza colonna abbiamo scritto le componenti di $f(\mathbf{e}_3)$ rispetto a B'.
Consideriamo ora la base $B'' = \{[1, 1]^T, [1, -1]^T\}$ di $\mathbb{R}^2$ e troviamo la matrice associata ad f rispetto alle basi B e B'':

$$f(\mathbf{e}_1) = [1, 2]^T = \frac{3}{2}[1, 1]^T - \frac{1}{2}[1, -1]^T$$
$$f(\mathbf{e}_2) = [1, 0]^T = \frac{1}{2}[1, 1]^T + \frac{1}{2}[1, -1]^T$$
$$f(\mathbf{e}_3) = [-1, 1]^T = 0[1, 1]^T - 1[1, -1]^T$$

Quindi

$$M_{B,B''} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$