APPUNTI PER UN CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA

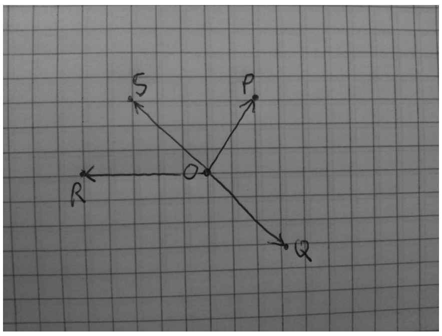
Chapter 1

Vettori, coordinate e geometria

Una delle nozioni fondamentali di questo corso è quella di *vettore*. Come vedremo, esiste una definizione astratta di questa nozione nella quale rientrano oggetti matematici di natura molto diversa tra loro. Prima di affrontare tale definizione generale vediamo il caso più semplice e intuitivo, che sarà utile avere in mente come esempio quando ne vedremo la versione astratta: quello dei *vettori geometrici*.

1.1 Vettori geometrici

Un *vettore geometrico applicato nel piano* è un segmento orientato che va da un punto fissato O verso un secondo punto P del piano, come nel disegno seguente[1].



Analogamente, parliamo di *vettori geometrici applicati nello spazio* se il punto P (e quindi il segmento) è libero di variare in tutto lo spazio tridimensionale. In entrambi i casi il vettore sarà denotato $\vec{OP}$ (si noti che il

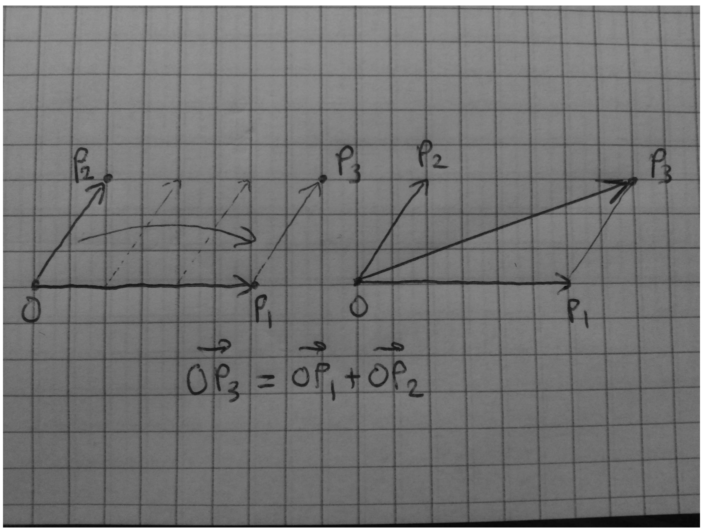
[1] L'orientazione viene messa in evidenza con un simbolo di freccia

punto finale P può anche essere uguale a O, ovvero il vettore può essere "schiacciato" sul punto O).
Denoteremo con V_O^2 l'insieme dei vettori geometrici applicati in O nel piano, e con V_O^3 l'insieme dei vettori geometrici applicati in O liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale.

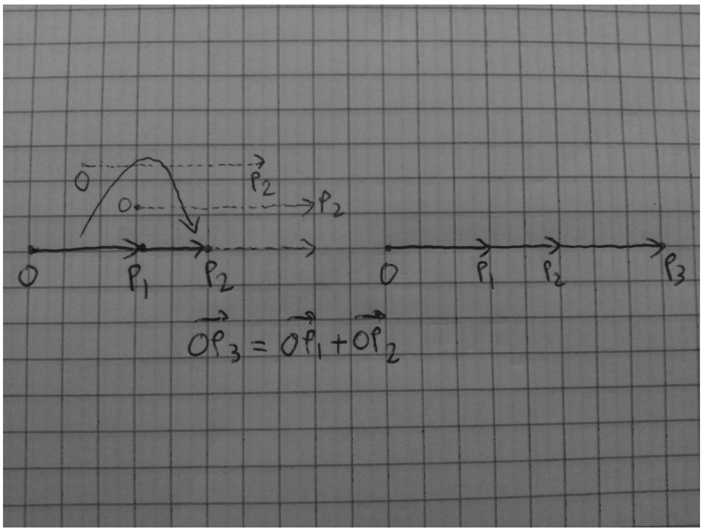
I vettori orientati sono importanti in fisica, dove vengono usati per rappresentare forze applicate sul punto O: ad esempio, si può immaginare che in O si trovi un oggetto sul quale viene esercitata una forza che lo "trascina" nella direzione e nel verso dati dalla freccia, mentre l'intensità della forza esercitata è rappresentata dalla lunghezza del segmento.

Con questa interpretazione, è naturale chiedersi cosa succede quando su O si esercitano contemporaneamente due forze rappresentate da due vettori geometrici $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$: in tal caso, si verifica sperimentalmente che la forza totale "percepita" da O è quella rappresentata dal terzo vettore $\vec{OP_3}$ ottenuto nel modo seguente: si trasla parallelamente uno dei due vettori, diciamo $\vec{OP_2}$, in modo da spostare il suo punto di applicazione da O nel punto finale P_1 dell'altro vettore e si individua così il punto P_3 (si noti che si otterrebbe lo stesso punto se traslassimo invece $\vec{OP_1}$ spostando il suo punto di applicazione in P_2).
Dal momento che $\vec{OP_3}$ rappresenta la forza totale esercitata su O quando si applicano contemporaneamente $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$, è naturale pensare $\vec{OP_3}$ come la somma di $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$: scriveremo cioè

$$\vec{OP_3} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}$$



definendo in tal modo un'operazione di somma sull'insieme dei vettori geometrici (del piano o dello spazio).
Per vettori che non hanno la stessa direzione, si osserva che OP_3 è la diagonale del parallelogramma che ha OP_1 e OP_2 come lati (si parla infatti anche di *regola del parallelogramma*). Il metodo descritto funziona comunque anche per sommare due vettori che hanno la stessa direzione:

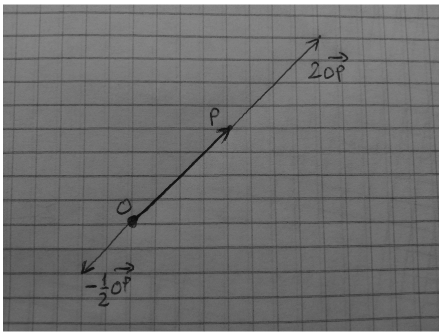


Un'altra operazione che si può introdurre nell'insieme dei vettori geometrici è il prodotto del vettore per un numero reale: nel contesto delle forze, l'idea è quella di rappresentare una variazione dell'intensità e eventualmente del verso della forza rappresentata dal vettore.
Più precisamente, dati un vettore geometrico $\vec{OP}$ e un numero reale $c \in \mathbb{R}$, definiamo $c\vec{OP}$ come il vettore che sta sulla stessa retta a cui appartiene $\vec{OP}$, ma avente:

(1) Stesso verso e lunghezza c volte la lunghezza di $\vec{OP}$, se c è positivo;

(2) Verso opposto e lunghezza $-c$ volte quella di $\vec{OP}$, se c è negativo;

(3) Lunghezza nulla se $c = 0$, cioè $0\vec{OP} = \vec{OO}$.



Nel contesto dei vettori, i numeri reali si chiamano anche *scalari*.

Come vedremo nell'ultima parte di questo capitolo, la nozione di vettore geometrico e le operazioni di somma tra vettori e prodotto di un vettore per un numero che abbiamo appena definito saranno fondamentali per impostare e risolvere problemi geometrici nel piano e nello spazio. Per questo motivo, è necessario conoscere e mettere in evidenza le proprietà di cui godono tali operazioni, che useremo per manipolare espressioni e formule che coinvolgono i vettori. Si può verificare (con dimostrazioni di geometria euclidea, che omettiamo) che valgono le seguenti:

(1) La somma è *associativa*

$$(\vec{OP_1} + \vec{OP_2}) + \vec{OP_3} = \vec{OP_1} + (\vec{OP_2} + \vec{OP_3}) \tag{1.1}$$

(2) La somma è *commutativa*

$$\vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \vec{OP_2} + \vec{OP_1} \tag{1.2}$$

(3) Il vettore $\vec{OO}$ funge da elemento neutro per la somma:

$$\vec{OP} + \vec{OO} = \vec{OO} + \vec{OP} = \vec{OP} \tag{1.3}$$

(4) Per ogni vettore $\vec{OP}$, il vettore $(-1)\vec{OP}$ (ovvero il vettore che si ottiene da $\vec{OP}$ semplicemente invertendo il verso, senza modificare direzione e lunghezza) è il suo inverso additivo o opposto rispetto alla somma:

$$\vec{OP} + (-1)\vec{OP} = (-1)\vec{OP} + \vec{OP} = \vec{OO} \tag{1.4}$$

(5) Dati due numeri reali c_1, c_2 e un vettore $\vec{OP}$, si ha

$$c_1(c_2\vec{OP}) = (c_1c_2)\vec{OP} \tag{1.5}$$

(una sorta di proprietà associativa del prodotto).

(6) Per ogni vettore $\vec{OP}$, si ha

$$1\vec{OP} = \vec{OP} \tag{1.6}$$

(ovvero il numero 1 funge da elemento neutro rispetto al prodotto per scalari).

(7) Dati due numeri reali c_1, c_2 e un vettore $\vec{OP}$, si ha

$$(c_1 + c_2)\vec{OP} = c_1\vec{OP} + c_2\vec{OP} \tag{1.7}$$

(8) Dati un numero reale c e due vettori $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$ si ha

$$c(\vec{OP_1} + \vec{OP_2}) = c\vec{OP_1} + c\vec{OP_2}. \tag{1.8}$$

(le ultime due ci dicono che vale la proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri reali o rispetto alla somma di vettori).

Osservazione 1.1. Come esempio di applicazione delle proprietà appena elencate, mostriamo che in un'uguaglianza tra vettori, esattamente come si fa in un'uguaglianza tra numeri, si possono"spostare i vettori" da un membro all'altro cambiandoli di segno:

$$\vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \vec{OP_3} \;\rightarrow\; \vec{OP_1} = \vec{OP_3} - \vec{OP_2}$$

dove, come si fa anche per i numeri, stiamo scrivendo $\vec{OP_3} - \vec{OP_2}$ come forma semplificata di $\vec{OP_3} + (-1)\vec{OP_2}$.
Per vederlo, sommiamo a entrambi i membri di $\vec{OP_1} + \vec{OP_2} = \vec{OP_3}$ il vettore $(-1)\vec{OP_2}$:

$$(\vec{OP_1} + \vec{OP_2}) + (-1)\vec{OP_2} = \vec{OP_3} + (-1)\vec{OP_2}$$

Applichiamo la proprietà associativa (1.1) a primo membro:

$$\vec{OP_1} + (\vec{OP_2} + (-1)\vec{OP_2}) = \vec{OP_3} + (-1)\vec{OP_2}$$

Applichiamo la proprietà (1.4) che afferma che $(-1)\vec{OP_2}$ è l'opposto di $\vec{OP_2}$:

$$\vec{OP_1} + \vec{OO} = \vec{OP_3} + (-1)\vec{OP_2}$$

e infine applichiamo la (1.3) che ci dice che il vettore nullo funge da elemento neutro:

$$\vec{OP_1} = \vec{OP_3} + (-1)\vec{OP_2}$$

come volevamo.

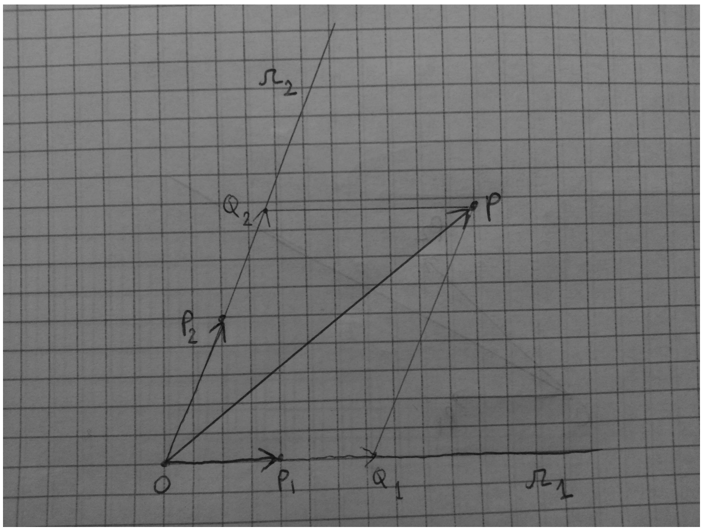
1.2 Coordinate

Consideriamo ora due vettori geometrici $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ nel piano, e supponiamo che $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ non abbiano la stessa direzione.
Affermiamo che ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^2$ può essere ottenuto sommando multipli opportuni di $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$, ovvero

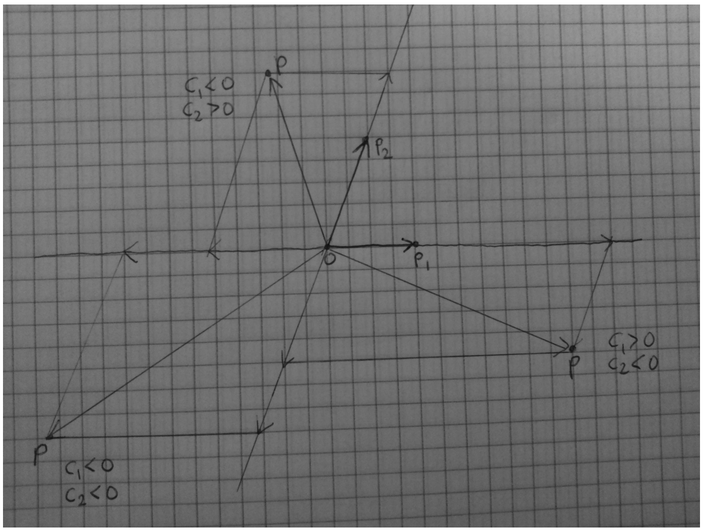
$$\vec{OP} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2}$$

dove c_1, c_2 sono opportuni numeri reali.

Infatti, questo può essere facilmente visto graficamente: come nel disegno seguente, prolunghiamo i vettori $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ disegnando le due rette r_1 e r_2; proiettamo quindi il punto P su r_1 seguendo la direzione parallela a $\vec{OP_2}$, e chiamiamo il punto proiettato Q_1; analogamente, proiettamo il punto P su r_2 seguendo la direzione parallela a $\vec{OP_1}$, e chiamiamo il punto proiettato Q_2.



Avendo fatto le due proiezioni parallelamente a $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$, risulta determinato un parallelogramma che ha $\vec{OQ_1}$ e $\vec{OQ_2}$ come lati e $\vec{OP}$ come diagonale, quindi per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $\vec{OP} = \vec{OQ_1} + \vec{OQ_2}$.
Ma dal momento che $\vec{OQ_1}$ si trova sulla stessa retta di $\vec{OP_1}$, per come abbiamo definito il prodotto dei vettori per i numeri reali, esisterà un numero reale c_1 tale che $\vec{OQ_1} = c_1\vec{OP_1}$ (dove c_1 dipende semplicemente dal rapporto tra la lunghezza di $\vec{OQ_1}$ e quella di $\vec{OP_1}$) e analogamente esisterà un numero reale c_2 tale che $\vec{OQ_2} = c_2\vec{OP_2}$ (dove c_2 dipende dal rapporto tra la lunghezza di $\vec{OQ_2}$ e quella di $\vec{OP_2}$).
Abbiamo quindi concluso, come volevamo, che $\vec{OP} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2}$.
Si noti che, nella situazione considerata nel disegno, $c_1, c_2 > 0$ in quanto $\vec{OQ_1}$ e $\vec{OQ_2}$ hanno lo stesso verso di $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ rispettivamente. In generale, la stessa costruzione può essere effettuata per qualunque vettore $\vec{OP}$ del piano e i coefficienti c_1 e c_2 potranno anche essere negativi[2] a seconda del quadrante nel quale si trova $\vec{OP}$, ovvero a seconda che la proiezione di P sulle rette r_1, r_2 cada dalla stessa parte o dalla parte opposta dei punti P_1 e P_2.



In ogni caso si avrà sempre $\vec{OP} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2}$.

Diamo allora la seguente, importante

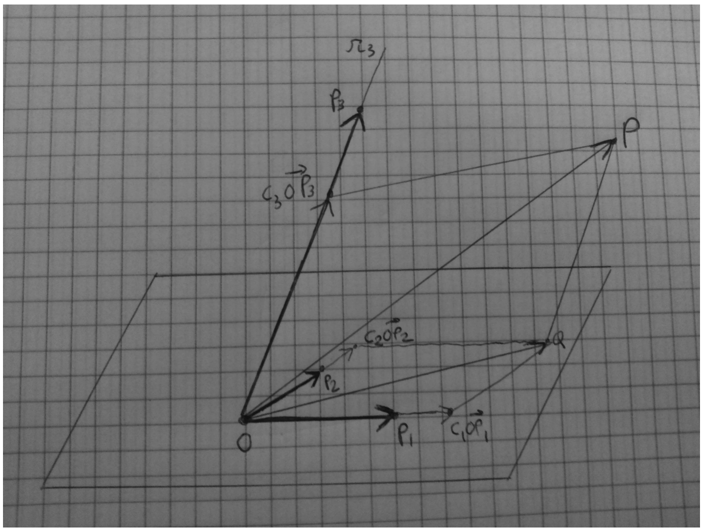
Definizione 1.2. La coppia (c_1, c_2) di numeri reali tale che $\vec{OP} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2}$ si dice la *coppia delle coordinate* del vettore $\vec{OP}$ rispetto ai vettori base $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}$

[2] Può essere anche $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$: nel primo caso, si ha $\vec{OP} = c_2\vec{OP_2}$, nel secondo $\vec{OP} = c_1\vec{OP_1}$, cioè $\vec{OP}$ non sta all'interno di uno dei quadranti in cui le rette r_1, r_2 dividono il piano, ma sta sulla retta r_2 (se $\vec{OP} = c_2\vec{OP_2}$) o sulla retta r_1 (se $\vec{OP} = c_1\vec{OP_1}$).

Le coordinate c_1 e c_2 di un vettore dipendono chiaramente dalla scelta dei vettori base $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}$, ma una volta che essi sono stati fissati scriveremo $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2)$, identificando di fatto il vettore con la coppia delle sue coordinate, e quindi l'insieme V_O^2 con l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali.

Osservazione 1.3. Bisognerebbe porsi il problema dell'*unicità* di c_1 e c_2: se esistessero due modi diversi, diciamo $\vec{OP} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2}$ e $\vec{OP} = c_1'\vec{OP_1} + c_2'\vec{OP_2}$, di decomporre $\vec{OP}$, non avremmo una e una sola coppia di numeri con cui identificarlo: in realtà, la costruzione grafica già suggerisce che l'unicità è garantita, ma torneremo più in dettaglio su tale questione nel Paragrafo 1.4.

Un risultato analogo a quello appena visto per i vettori nel piano può essere ottenuto anche nell'insieme V_O^3 dei vettori geometrici nello spazio tridimensionale. In questo caso non dobbiamo però partire da una coppia di vettori non allineati ma da una terna di vettori $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$ e $\vec{OP_3}$ *che non stiano tutti e tre sullo stesso piano*: allora, è facile vedere graficamente, utilizzando proiezioni come abbiamo fatto nel caso di due vettori nel piano, che ogni vettore $\vec{OP} \in V_O^3$ può essere scritto come combinazione $c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2} + c_3\vec{OP_3}$.



Come rappresentato nel disegno, si proietta il punto P sul piano su cui stanno $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ seguendo la direzione di $\vec{OP_3}$ e si individua così un punto Q; proiettando poi P sulla retta r_3 parallelamente al vettore $\vec{OQ}$, risulta individuato un parallelogramma, che ci dice che $\vec{OP}$ si scrive come somma $\vec{OP} = \vec{OQ} + c_3\vec{OP_3}$ di $\vec{OQ}$ e di un opportuno multiplo $c_3\vec{OP_3}$ di $\vec{OP_3}$. A

questo punto si osserva che $\vec{OQ}$, stando sul piano di $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ si scriverà come loro combinazione lineare $\vec{OQ} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2}$, e sostituendo nella $\vec{OP} = \vec{OQ} + c_3\vec{OP_3}$ si conclude che $\vec{OQ} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2} + c_3\vec{OP_3}$.
In modo analogo a quanto già fatto per vettori geometrici del piano, possiamo allora dare la seguente

Definizione 1.4. La terna (c_1, c_2, c_3) di numeri reali tale che $\vec{OP} = c_1\vec{OP_1} + c_2\vec{OP_2} + c_3\vec{OP_3}$ si dice la *terna delle coordinate* del vettore $\vec{OP}$ rispetto ai vettori di base $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$.

Come già osservato per vettori del piano, le coordinate c_1, c_2 e c_3 di un vettore dipendono chiaramente dalla scelta dei vettori base $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$, ma una volta che essi sono stati fissati scriveremo $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2, c_3)$, identificando di fatto il vettore con la terna delle sue coordinate, e quindi l'insieme V_O^3 con l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne di numeri reali.

L'importanza delle coordinate consiste nel fatto che esse, permettendoci di rappresentare i vettori mediante coppie o terne di numeri, ci permettono di tradurre in calcoli numerici i calcoli tra vettori: questa è un'importante semplificazione, in quanto è più semplice lavorare con numeri che con costruzioni o dimostrazioni di geometria euclidea che sarebbero altrimenti necessarie per lavorare con i vettori, che sono oggetti geometrici.
Per dare una prima idea di queste affermazioni, mostriamo il seguente, importante risultato:

Proposizione 1.5. Sia $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$ una coppia di vettori base non allineati nell'insieme V_O^2. Le coordinate rispetto a $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$ hanno le seguenti proprietà:

(1) Se $\vec{OP}$ e $\vec{OP'}$ hanno coordinate rispettivamente (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2), le coordinate di $\vec{OP} + \vec{OP'}$ sono date dalla coppia $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$ ottenuta sommando componente per componente le coppie delle coordinate dei due vettori.

(2) Se $\vec{OP}$ ha coordinate (x_1, x_2) e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2) ottenuta moltiplicando per c le coordinate di $\vec{OP}$.

Proof. Il fatto che $\vec{OP}$ abbia coordinate (x_1, x_2) rispetto a $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ significa per definizione che $\vec{OP} = x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}$, e analogamente il fatto che $\vec{OP'}$ abbia coordinate (x'_1, x'_2) significa che $\vec{OP'} = x'_1\vec{OP_1} + x'_2\vec{OP_2}$. Ma allora

$$\vec{OP} + \vec{OP'} = (x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}) + (x'_1\vec{OP_1} + x'_2\vec{OP_2}) =$$

(riordiniamo gli addendi e raccogliamoli diversamente sfruttando le proprietà associativa e commutativa della somma tra vettori)

$$= (x_1\vec{OP_1} + x_1'\vec{OP_1}) + (x_2\vec{OP_2} + x_2'\vec{OP_2}) =$$

(sfruttiamo la proprietà (1.7) sia nella prima parentesi che nella seconda)

$$= (x_1 + x_1')\vec{OP_1} + (x_2 + x_2')\vec{OP_2}$$

Ma questo, per definizione di coordinate, significa proprio che le coordinate di $\vec{OP} + \vec{OP'}$ sono date dalla coppia $(x_1 + x_1', x_2 + x_2')$, come affermato nella (1).

Per dimostrare la (2), partiamo sempre dal fatto che dire che $\vec{OP}$ abbia coordinate (x_1, x_2) significa per definizione che $\vec{OP} = x_1\vec{OP_1}+x_2\vec{OP_2}$. Allora

$$c\vec{OP} = c(x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}) =$$

(applichiamo la proprietà (1.8))

$$= c(x_1\vec{OP_1}) + c(x_2\vec{OP_2}) =$$

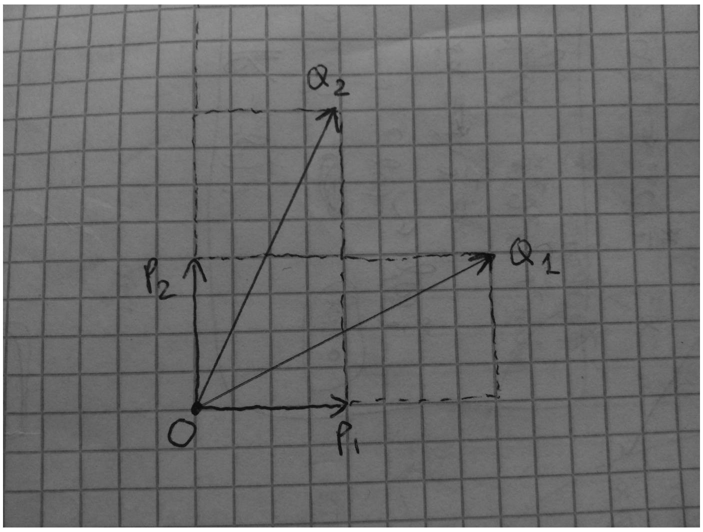
(applicando la (1.5) a entrambi gli addendi)

$$= (cx_1)\vec{OP_1} + (cx_2)\vec{OP_2}$$

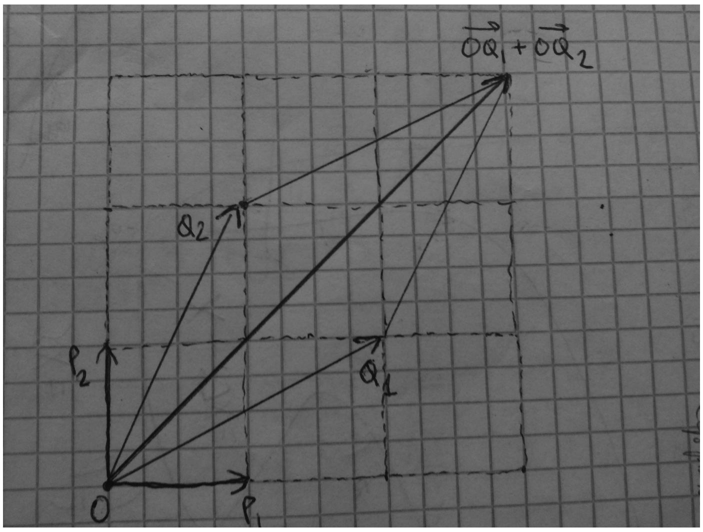
Ma questo, per definizione di coordinate, ci dice proprio che le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2), come affermato nella (2).

□

Esempio 1.6. Per un esempio di quanto appena dimostrato, si prendano i vettori base $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ come nel disegno seguente, e si considerino i due vettori $\vec{OQ_1}$ e $\vec{OQ_2}$



Come si vede graficamente, si ha $\vec{OQ}_1 = 2\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$ e $\vec{OQ}_2 = \vec{OP}_1 + 2\vec{OP}_2$, ovvero le coordinate di $\vec{OQ}_1$ sono date dalla coppia $(2, 1)$, mentre le coordinate di $\vec{OQ}_2$ sono date dalla coppia $(1, 2)$.
Allora, in base alla (1) della Proposizione 1.5, la somma $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$ ha coordinate (sempre rispetto a $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$) date da $(2 + 1, 1 + 2) = (3, 3)$, ovvero si ha $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2 = 3\vec{OP}_1 + 3\vec{OP}_2$.
In effetti, questo può essere verificato graficamente costruendo con la regola del parallelogramma la somma $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$, come nel disegno seguente



La cosa notevole è che siamo stati in grado di dire chi era il vettore $\vec{OQ}_1 + \vec{OQ}_2$ (in coordinate) con un semplicissimo conto aritmetico, anche prima di disegnarlo con la costruzione geometrica del parallelogramma.

Osservazione 1.7. Affermazioni del tutto analoghe a quelle della Proposizione 1.5 valgono anche nel caso dei vettori nello spazio. Più precisamente, si ha che fissata una terna $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$ di vettori non complanari nell'insieme V_O^3 dei vettori dello spazio tridimensionale, allora le coordinate rispetto a tale terna di base hanno le seguenti proprietà:

(1) Se $\vec{OP}$ e $\vec{OP'}$ hanno coordinate rispettivamente (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3), le coordinate di $\vec{OP}+\vec{OP'}$ sono date dalla terna $(x_1+x'_1, x_2+x'_2, x_3+x'_3)$ ottenuta sommando componente per componente le terne delle coordinate dei due vettori.

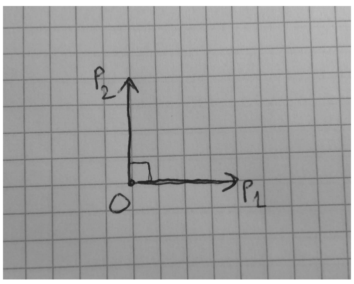
(2) Se $\vec{OP}$ ha coordinate (x_1, x_2, x_3) e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla terna (cx_1, cx_2, cx_3) ottenuta moltiplicando per c le coordinate di $\vec{OP}$.

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella della Proposizione 1.5, e la omettiamo.

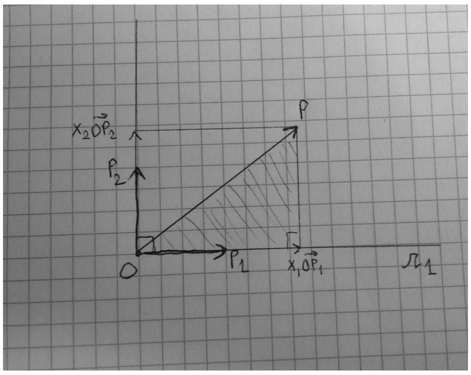
1.3 Lunghezze e angoli

Lavorare in coordinate rispetto a una base ci permette di tradurre numericamente costruzioni geometriche con i vettori e risolvere in modo più semplice problemi relativi ai vettori. Questo è vero qualunque sia la base scelta, tuttavia a seconda del problema specifico che dobbiamo risolvere, alcune basi possono essere più convenienti di altre, e in particolare quando si vuole rispondere, lavorando in coordinate, alle domande seguenti: qual è la lunghezza di un vettore dato? qual è l'angolo tra due vettori dati?
In tal caso, le basi più convenienti da usare, come stiamo per vedere, sono quelle formate da (due nel caso del piano, tre nel caso dello spazio) vettori tra loro ortogonali e di lunghezza 1 (rispetto a un'unità di misura scelta). Tali basi si chiamano *ortonormali.*

Infatti, consideriamo una tale base nel piano



Ora, consideriamo un vettore $\vec{OP}$, del quale sappiamo che le coordinate rispetto a tale base sono date da (x_1, x_2) (ovvero, per definizione di coordinate, $\vec{OP} = x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}$): è possibile calcolare la lunghezza del vettore $\vec{OP}$ a partire dalle coordinate? Per rispondere a tale domanda, consideriamo il seguente disegno, nel quale è rappresentata la decomposizione $\vec{OP} = x_1\vec{OP_1} + x_2\vec{OP_2}$

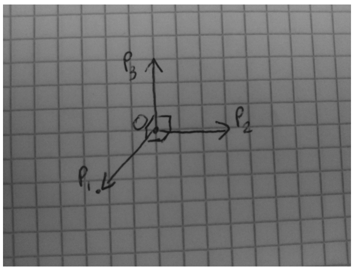


Dal momento che abbiamo scelto i vettori di base perpendicolari, quando proiettiamo P sulla retta r_1 che contiene $\vec{OP_1}$ seguendo la direzione di $\vec{OP_2}$, tale proiezione incontra r_1 con un angolo di 90 gradi, e si viene quindi a formare un triangolo rettangolo (evidenziato nel disegno) avente come ipotenusa proprio $\vec{OP}$ e al quale possiamo quindi applicare il teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza di $\vec{OP}$, che denoteremo $|\vec{OP}|$.
A questo scopo, notiamo che il cateto orizzontale di tale triangolo è dato dal vettore $x_1\vec{OP_1}$, e quindi la sua lunghezza è data dal prodotto di x_1 per la lunghezza di $\vec{OP_1}$: ma avendo scelto i vettori di base di lunghezza unitaria, questo implica che la lunghezza di tale cateto sia semplicemente x_1; per quello che riguarda il cateto verticale, esso per costruzione ha la stessa lunghezza del vettore $x_2\vec{OP_2}$, ovvero x_2 (in quanto $\vec{OP_2}$ ha lunghezza 1). Quindi il teorema di Pitagora ci dice che $|\vec{OP}|^2 = x_1^2 + x_2^2$ ovvero, se per la coppia $x = (x_1, x_2)$ usiamo la notazione $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

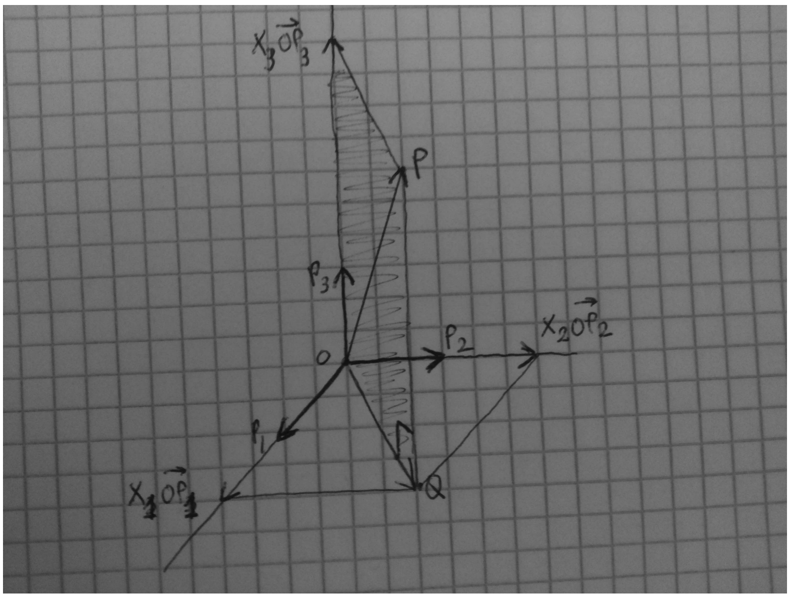
$$|\vec{OP}| = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{1.9}$$

che rappresenta la formula cercata, che ci dà la lunghezza di $\vec{OP}$ in funzione delle sue coordinate.
Si noti che nei ragionamenti che abbiamo fatto è stato fondamentale aver scelto una base fatta di vettori ortogonali (questo ha fatto comparire un triangolo rettangolo a cui abbiamo applicato il teorema di Pitagora) e di lunghezza 1 (che ci ha permesso di esprimere le lunghezze dei cateti in funzione delle sole coordinate).

Vediamo adesso come si ottiene una formula analoga nello spazio tridimensionale: sia $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ una base ortonormale dell'insieme V_O^3 dei vettori applicati nello spazio tridimensionale:



Supponiamo ora di avere un vettore $\vec{OP}$ e di volerne calcolare la lunghezza, che denotiamo $|\vec{OP}|$, in funzione delle sue coordinate x_1, x_2, x_3 rispetto alla base B scelta. Per definizione di coordinate, $\vec{OP}$ si decompone come somma $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$, come nel disegno seguente



La decomposizione è stata ottenuta graficamente come segue: prima si proietta P perpendicolarmente sul piano su cui stanno P_1 e P_2 ottenendo il punto Q (l'angolo in Q quindi è retto, come messo in evidenza nel disegno) e si ottiene un rettangolo, ombreggiato nel disegno, che ci dice che $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3$; poi dal momento che $\vec{OQ}$ giace sul piano di P_1 e P_2 lo si può decomporre come $\vec{OQ} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$ (sempre ottenendo angoli retti in quanto $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ sono perpendicolari), e quindi $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3 = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$ come volevamo.

Ora, essendo OP ipotenusa del triangolo OPQ rettangolo in Q, per il teorema di Pitagora avremo

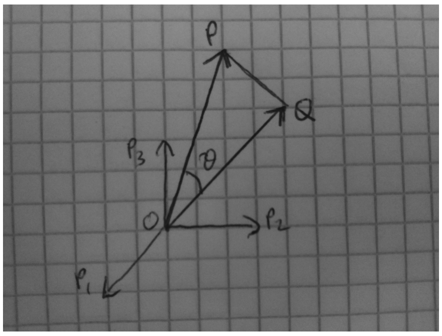
$$|OP|^2 = |OQ|^2 + |PQ|^2 \tag{1.10}$$

Ma da una parte, il segmento PQ, essendo un lato del rettangolo ombreggiato in figura, è lungo esattamente quanto il vettore $x_3\vec{OP_3}$, ovvero x_3 (in quanto $\vec{OP_3}$ ha lunghezza 1); dall'altra, OQ è la diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori $x_1\vec{OP_1}$ e $x_2\vec{OP_2}$ di lunghezze rispettivamente x_1 e x_2 (in quanto $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ hanno lunghezza 1), quindi sempre per il teorema di Pitagora si ha $|OQ|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Combinando queste osservazioni con la (1.10), si ha $|OP|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ovvero, se per la terna $x = (x_1, x_2, x_3)$ usiamo la notazione $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,

$$|\vec{OP}| = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1.11}$$

che è la formula cercata, analoga della (1.9), per la lunghezza di un vettore geometrico $\vec{OP}$ dello spazio in funzione delle sue coordinate rispetto alla base scelta.

Ora, poniamoci il problema di calcolare l'angolo tra due vettori non nulli $\vec{OP}, \vec{OQ} \in V_O^3$ una volta note le loro coordinate rispetto a una base ortonormale. Supponiamo che tali coordinate siano rispettivamente (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3).
Consideriamo il triangolo OPQ del disegno seguente:

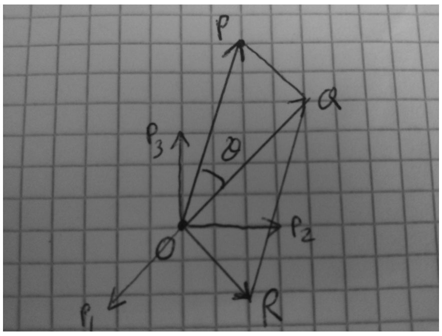


Per un risultato di trigonometria, l'angolo θ tra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ è collegato alle lunghezze dei segmenti OP, OQ e PQ dalla formula[3]

[3]Si tratta di una sorta di "teorema di Pitagora per triangoli qualunque": infatti, se il triangolo è rettangolo in O, ovvero $\theta = \frac{\pi}{2}$, allora $\cos\theta = 0$ e la formula si riduce a $|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2$, il classico teorema di Pitagora.

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2\cos\theta |OP| \cdot |OQ| \tag{1.12}$$

Ora, per la (1.11), si ha $|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e $|OQ| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$: per ricavare l'angolo θ tramite la (1.12) ci resta da calcolare la lunghezza $|PQ|$. Dal momento che la (1.11) ci consente di calcolare lunghezze solo dei vettori applicati in O, tracciamo come nel disegno seguente



il vettore $\vec{OR}$ parallelo al segmento PQ e avente la sua stessa lunghezza, ovvero $|PQ| = |\vec{OR}|$.
Ora, essendo $\vec{OR}$ parallelo a PQ e della stessa lunghezza, il quadrilatero di vertici O, R, P, Q è un parallelogramma che ha $\vec{OR}$ e $\vec{OP}$ come lati e $\vec{OQ}$ come diagonale: quindi, dalla definizione di somma tra vettori applicati, si ha $\vec{OQ} = \vec{OR} + \vec{OP}$, ovvero $\vec{OR} = \vec{OQ} - \vec{OP}$.
Per le proprietà delle coordinate viste nell'Osservazione 1.7, le coordinate di $\vec{OR} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ sono date dalle coordinate di $\vec{OQ}$ meno le coordinate di $\vec{OP}$, ovvero $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$, e quindi, dalla (1.11) si ha finalmente

$$|PQ| = |\vec{OR}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \tag{1.13}$$

La formula (1.12) diventa allora

$$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-2\cos\theta\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \tag{1.14}$$

Poichè il primo membro, per la formula del quadrato di binomio, è uguale a

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 + x_3^2 + y_3^2 - 2x_3y_3,$$

semplificando con i quadrati a secondo membro rimane

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 = -2\cos\theta\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \tag{1.15}$$

ovvero, ricavando $\cos\theta$,

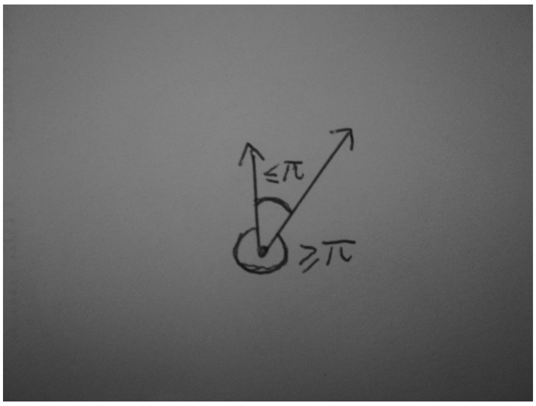
$$\cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \tag{1.16}$$

che è finalmente la formula cercata che esprime l'angolo tra due vettori in funzione delle loro coordinate rispetto alla base data.

Con un calcolo analogo nel piano (dove non cambia nulla delle costruzioni fatte e dei passaggi svolti, salvo il fatto che abbiamo due coordinate anziché tre) si ottiene la formula analoga

$$\cos\theta = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \tag{1.17}$$

Osservazione 1.8. Una volta ricavato il valore del coseno dell'angolo mediante la formula (1.16) (la (1.17) nel caso del piano), all'interno dell'intervallo $[0, 2\pi]$ avremo in generale *due* possibili valori di θ corrispondenti: ad esempio, se $\cos\theta = \frac{1}{2}$ allora $\theta = \frac{\pi}{3}$ oppure $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$. Questo riflette il fatto geometrico ovvio, illustrato nel disegno



che due vettori individuano due angoli, uno minore o uguale a π e un altro maggiore o uguale a π. Per risolvere questa ambiguità, quando parleremo di angolo tra due vettori intenderemo d'ora in poi quello minore o uguale di π (il cosiddetto *angolo convesso*).

Esempio 1.9. Consideriamo ad esempio i vettori $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ che rispetto a una terna ortonormale $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ hanno coordinate rispettivamente $(1, 0, 1)$ e $(1, -1, 0)$ (in base alla definizione di coordinate, sono quindi $\vec{OP} = 1\vec{OP}_1 + 0\vec{OP}_2 + 1\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_3$ e $\vec{OQ} = 1\vec{OP}_1 + (-1)\vec{OP}_2 + 0\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2$). Allora l'angolo tra $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$, in base alla (1.16), è dato da

$$\cos\theta = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

ovvero, dalla trigonometria, $\theta = \frac{\pi}{3}$ (in gradi, 60°)

Le formule (1.16) e (1.17) ci forniscono anche un criterio per verificare in coordinate se due vettori sono perpendicolari: infatti, l'angolo θ è $\frac{\pi}{2}$ (ovvero 90 gradi) se e solo se $\cos\theta = 0$, il che può essere vero solo se i numeratori della (1.16) e della (1.17) sono nulli.
Ad esempio, nello spazio, abbiamo che due vettori $\vec{OP} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{OQ} \equiv (y_1, y_2, y_3)$ sono perpendicolari se e solo se si verifica

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0 \tag{1.18}$$

Ad esempio, i due vettori di coordinate $(1, 2, 1)$ e $(3, 1, -5)$ sono perpendicolari in quanto

$$1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-5) = 3 + 2 - 5 = 0$$

Osservazione 1.10. In base al criterio (1.18), il vettore nullo $\vec{OO}$ risulta essere perpendicolare a qualunque altro vettore $\vec{OP}$, in quanto le sue coordinate sono $(0, 0, 0)$ e, qualunque siano le coordinate (x_1, x_2, x_3) di $\vec{OP}$ si ottiene $x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$.
Tuttavia, si noti che le formule (1.16) e (1.17) sono applicabili per calcolare un angolo solo se nessuno dei due vettori è nullo, altrimenti una delle due radici a denominatore varrebbe $\sqrt{0^2+0^2+0^2} = 0$, e come sappiamo non possiamo dividere per zero.

Il numeratore che compare nella (1.16), o nella (1.17) nel caso del piano, può essere interpretato come una nuova operazione, una sorta di prodotto che date due terne (due coppie nel caso del piano) di numeri reali, ci dà come risultato un numero reale: se denotiamo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ (nel caso del piano, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$), possiamo cioè porre

$$x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \tag{1.19}$$

(nel caso del piano, $x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2$).

La (1.19) è un esempio di *prodotto scalare*, una nozione che vedremo più in generale in uno dei prossimi capitoli (il nome viene dal fatto che si tratta di un'operazione il cui risultato è un numero reale, e come abbiamo detto sopra nel contesto dei vettori i numeri reali si chiamano anche scalari).

Si noti che anche le formule (1.9) e (1.11) per il calcolo in coordinate della lunghezza di un vettore (rispettivamente nel piano e nello spazio) possono essere espresse in termini del prodotto scalare: infatti, ad esempio per la (1.11) si ha, facendo riferimento alla (1.19),

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3} = \sqrt{x \cdot x}$$

Il prodotto scalare rappresenta quindi una sorta di "strumento di misura" tramite il quale esprimiamo le misure delle lunghezze e degli angoli tra vettori quando lavoriamo in coordinate: quindi, per manipolare espressioni che riguardano lunghezze e angoli e, come faremo nei capitoli successivi, ricavare formule che coinvolgono in qualche modo queste nozioni (es. riflessioni, proiezioni ortogonali etc.) è necessario conoscerne le proprietà algebriche. Mostriamo le proprietà più importanti, limitandoci al caso di $\mathbb{R}^3$ (tali proprietà saranno valide anche nel caso di $\mathbb{R}^2$, dove si ricavano nello stesso modo e l'unica differenza è che nelle formule non compare la terza componente)

(1) Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa: infatti, si verifica immediatamente che

$$x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = y \cdot x$$

(2) Abbiamo visto nel paragrafo precedente che se due vettori geometrici $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ nello spazio hanno coordinate date rispettivamente da due terne $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, allora la loro somma $\vec{OP} + \vec{OQ}$ ha coordinate date dalla terna $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ che si ottiene sommando le rispettive componenti delle due terne: questo definisce un'operazione di somma tra le terne x e y, che possiamo indicare come $x + y$, e possiamo verificare che il prodotto scalare gode della proprietà distributiva rispetto a tale somma, ovvero date tre terne $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3)$ valgono le

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \tag{1.20}$$

(rispettivamente proprietà distributiva a destra e a sinistra).

Infatti, essendo $y + z = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$, dalla (1.19) si ha

$$x \cdot (y + z) = x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + x_3(y_3 + z_3) =$$

(usando per ciascuno dei tre addendi la proprietà distributiva del prodotto di numeri reali rispetto alla somma)

$$= x_1y_1 + x_1z_1 + x_2y_2 + x_2z_2 + x_3y_3 + x_3z_3 =$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 = x \cdot y + x \cdot z$$

come volevamo.

Allo stesso modo (omettiamo quindi i dettagli) si verifica che vale anche la proprietà distributiva a sinistra, ovvero la seconda delle (1.20).

(3) Abbiamo visto nel paragrafo precedente che se un vettore geometrico $\vec{OP}$ nello spazio ha coordinate date dalla terna $x = (x_1, x_2, x_3)$, allora il prodotto $c\vec{OP}$ del vettore per un numero $c \in \mathbb{R}$ ha coordinate date dalla terna (cx_1, cx_2, cx_3) che si ottiene moltiplicando le componenti della terna x per c: posto $cx = (cx_1, cx_2, cx_3)$, ci chiediamo come si comporta il prodotto scalare rispetto a questa operazione (che quindi non è nient'altro che il corrispondente in coordinate del prodotto di un numero reale per un vettore), ovvero cosa succede se date due terne $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ e un numero $c \in \mathbb{R}$ eseguiamo i prodotti scalari $(cx) \cdot y$ oppure $x \cdot (cy)$. Si verifica facilmente che si ha

$$(cx) \cdot y = c(x \cdot y), \quad x \cdot (cy) = c(x \cdot y) \tag{1.21}$$

Infatti, essendo $cx = (cx_1, cx_2, cx_3)$, per la (1.19) si ha

$$(cx) \cdot y = cx_1y_1 + cx_2y_2 + cx_3y_3 =$$

(mettendo in evidenza c che compare in tutti e tre gli addendi)

$$= c(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = c(x \cdot y)$$

come volevamo.

Allo stesso modo (omettiamo quindi i dettagli) si verifica la seconda delle (1.21).

Vediamo ora che in $\mathbb{R}^3$ è possibile introdurre anche un'altra operazione molto utile in geometria ma anche in altre applicazioni (soprattutto in fisica), il *prodotto vettoriale*, che date due terne di numeri reali dà come risultato non uno scalare (come nel caso del prodotto scalare) ma una nuova terna (che rappresenta in coordinate un nuovo vettore, da cui il nome). La definizione è la seguente: se $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ allora si pone

$$x \wedge y := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \tag{1.22}$$

Ad esempio, se $x = (1, 2, 3)$ e $y = (2, 5, -1)$, si ha

$$x \wedge y := (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5, 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2) = (-17, 7, 1)$$

Il motivo di questa particolare definizione è che si vuole che la terna $x \wedge y$ rappresenti (in coordinate rispetto a una base ortonormale) un vettore che è perpendicolare sia al vettore rappresentato da x che a quello rappresentato da y.
Per verificare che effettivamente è così, basta usare il criterio di perpendicolarità visto nella (1.18), cioè moltiplicare le rispettive componenti di x e $x \wedge y$ (la prima con la prima, la seconda con la seconda, la terza con la terza) e sommare:

$$x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) =$$
$$x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_2x_1y_3 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 = 0$$

in quanto come si vede facilmente tutti i termini si semplificano.
Analogamente, per verificare che anche il vettore di coordinate y è perpendicolare al vettore rappresentato dal prodotto vettoriale $x \wedge y$, svolgiamo il prodotto scalare tra y e $x \wedge y$:

$$y_1(x_2y_3 - x_3y_2) + y_2(x_3y_1 - x_1y_3) + y_3(x_1y_2 - x_2y_1) =$$
$$y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2 + y_2x_3y_1 - y_2x_1y_3 + y_3x_1y_2 - y_3x_2y_1 = 0$$

come volevamo.
Come abbiamo già fatto per il prodotto scalare, vediamo le più importanti proprietà algebriche dell'operazione di prodotto vettoriale: iniziamo con il segnalare subito che esso *non* è commutativo, ma si ha

$$x \wedge y = -y \wedge x$$

ovvero quando cambiamo l'ordine dei fattori il risultato finale cambia di segno (ovvero otteniamo una terna con le componenti di segno opposto). Ad esempio, per i due vettori $x = (1, 2, 3)$ e $y = (2, 5, -1)$ per cui sopra abbiamo già calcolato $x \wedge y = (-17, 7, 1)$, si ha

$$y \wedge x = (5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2, -1 \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = (17, -7, -1).$$

Ancora, nella manipolazione di espressioni e formule che coinvolgono il prodotto vettoriale è necessario fare attenzione al fatto che esso *non* è neanche associativo, cioè in generale si ha

$$x \wedge (y \wedge z) \neq (x \wedge y) \wedge z$$

Ad esempio, se prendiamo $x = (1, 0, 0)$ e $y = z = (0, 1, 0)$, si vede facilmente che $x \wedge y = (0, 0, 1)$ e $(x \wedge y) \wedge z = (-1, 0, 0)$, mentre dall'altra si ha $y \wedge z = (0, 0, 0)$ e $x \wedge (y \wedge z) = (0, 0, 0)$.

Ancora, esattamente come abbiamo fatto nella (1.20) per il prodotto scalare, verifichiamo che anche il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva (sia a destra che a sinistra) rispetto alla somma di terne definita da $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, ovvero

$$x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z, \quad (x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z \tag{1.23}$$

Ad esempio, verifichiamo la prima (la seconda è analoga): essendo $y + z = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$, per definizione di prodotto vettoriale si ha

$$x \wedge (y+z) = \big(x_2(y_3+z_3) - x_3(y_2+z_2), x_3(y_1+z_1) - x_1(y_3+z_3), x_1(y_2+z_2) - x_2(y_1+z_1)\big) =$$

(svolgendo i calcoli per ognuna delle tre componenti)

$$= \big(x_2y_3 + x_2z_3 - x_3y_2 - x_3z_2, x_3y_1 + x_3z_1 - x_1y_3 - x_1z_3, x_1y_2 + x_1z_2 - x_2y_1 - x_2z_1\big) =$$

$$\big(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1\big) + \big(x_2z_3 - x_3z_2, x_3z_1 - x_1z_3, x_1z_2 - x_2z_1\big)$$

ovvero proprio $x \wedge y + x \wedge z$, come volevamo.

Infine, verifichiamo che vale un'analoga delle (1.21) anche per il prodotto vettoriale, ovvero

$$x \wedge (cy) = c(x \wedge y), \quad (cx) \wedge y = c(x \wedge y) \tag{1.24}$$

Ad esempio, verifichiamo la prima (la seconda è analoga): essendo $cy = (cy_1, cy_2, cy_3)$, per definizione di prodotto vettoriale si ha

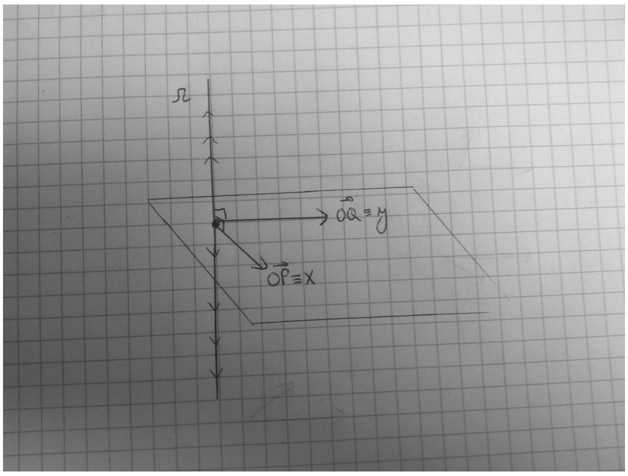
$$x \wedge (cy) = \big(x_2(cy_3) - x_3(cy_2), x_3(cy_1) - x_1(cy_3), x_1(cy_2) - x_2(cy_1)\big) =$$

(mettendo in evidenza il c in ognuna delle componenti)

$$= \big(c(x_2y_3 - x_3y_2), c(x_3y_1 - x_1y_3), c(x_1y_2 - x_2y_1)\big) =$$

ovvero proprio $c(x \wedge y)$, come volevamo.

Abbiamo detto che il prodotto vettoriale $x \wedge y$ di due terne $x, y \in \mathbb{R}^3$ ci dà le coordinate di un vettore perpendicolare a entrambi i vettori rappresentati da x e da y, e che quindi si trova sulla retta rappresentata nel disegno seguente:



Conoscendo quindi la direzione di tale vettore, per determinarlo completamente dobbiamo trovarne lunghezza e verso.
Per quello che riguarda la lunghezza, sappiamo come calcolarla mediante la formula (1.11). In base a tale formula e alla (1.22), si ha

$$|x \wedge y|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

Svolgendo i conti (omettiamo i passaggi), non è difficile vedere che tale espressione è uguale a

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

ovvero, ricordando la notazione di prodotto scalare introdotta nella (1.19)

$$|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2$$

Riscrivendo questa espressione come[4]

[4]Stiamo supponendo che sia x che y siano diverse dalla terna nulla $(0, 0, 0)$, altrimenti non potremmo porre $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ o $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ a denominatore. Del resto, se x o y fossero uguali alla terna nulla, il problema di calcolare la lunghezza di $x \wedge y$ non si porrebbe perché in quel caso dalla definizione di prodotto vettoriale si vedrebbe subito che anche $x \wedge y$ sarebbe la terna nulla, e quindi la lunghezza del vettore corrispondente sarebbe zero.

$$|x|^2|y|^2\left(1-\frac{(x\cdot y)^2}{|x|^2|y|^2}\right)$$

e ricordando che in base alla (1.16) si ha $\cos\theta = \frac{x\cdot y}{|x||y|}$ (dove θ è l'angolo formato dai vettori rappresentati da x e y) concludiamo che

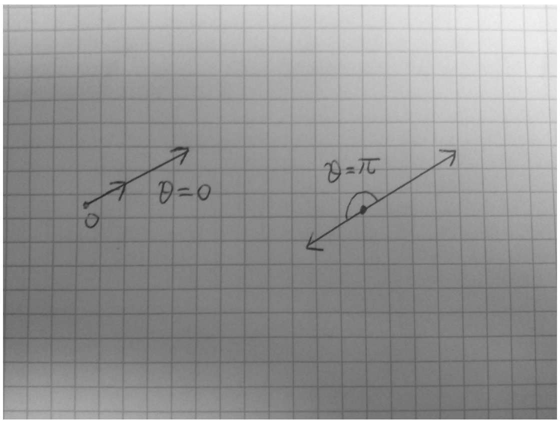
$$|x\wedge y|^2 = |x|^2|y|^2(1-\cos^2\theta) = |x|^2|y|^2\sin^2\theta$$

(dove abbiamo usato l'identità trigonometrica $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$), ovvero, estraendo la radice a entrambi i membri,

$$|x\wedge y| = |x||y|\sin\theta \tag{1.25}$$

che è finalmente una formula semplice per la lunghezza del vettore rappresentato in coordinate da $x\wedge y$, in funzione della lunghezza $|x|$ del vettore rappresentato da x, della lunghezza $|y|$ del vettore rappresentato da y e dell'angolo θ formato da questi due vettori[5].

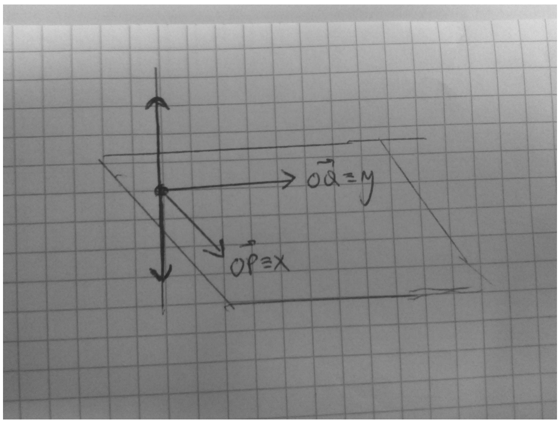
Tale formula ci dice ad esempio che $|x\wedge y| = 0$ (ovvero $x\wedge y = (0,0,0)$ rappresenta il vettore nullo $\vec{OO}$) esattamente quando $\sin\theta = 0$ ovvero, come ci dice la trigonometria, quando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ (180 gradi). Come si vede nel disegno seguente



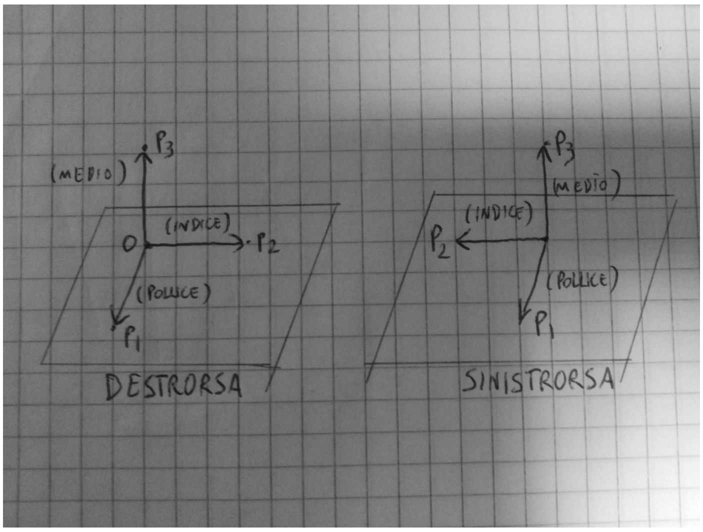
questo equivale a dire che i vettori sono allineati. In altre parole, deduciamo che $x\wedge y = (0,0,0)$ solo quando le terne x e y sono una multipla dell'altra (ovvero proporzionali).

Conoscendo direzione e lunghezza del vettore rappresentato da $x\wedge y$, per il verso abbiamo solo due possibilità:

[5]Si noti che estraendo la radice abbiamo scritto $\sin\theta$ invece del valore assoluto $|\sin\theta|$ perché, supponendo che θ rappresenti l'angolo convesso tra i due vettori (si veda l'Osservazione 1.8), vale $\theta\in[0,\pi]$ e quindi $\sin\theta\geq 0$.

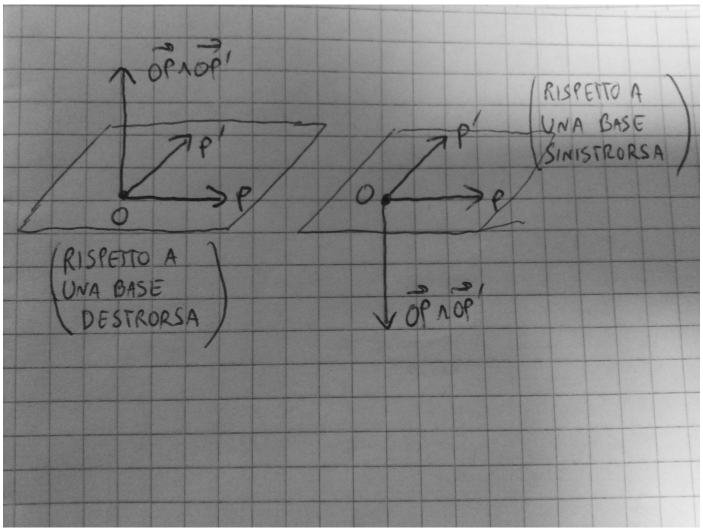


Ora, come vedremo, in realtà il verso del vettore rappresentato da $x \wedge y$ non è determinabile in modo univoco, ma dipende da quale base ortonormale abbiamo scelto per tradurre i vettori in coordinate.
Più precisamente, esistono due tipi di basi ortonormali: quelle *destrorse*, cosiddette perché i tre vettori $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ che le costituiscono sono, nell'ordine orientate come pollice, indice e medio della mano destra (disposti a formare angoli ortogonali tra loro), e quelle *sinistrorse*, cosiddette perché i tre vettori $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ sono orientate invece come pollice, indice e medio della mano sinistra (sempre disposti a formare angoli ortogonali tra loro).



È facile convincersi che si tratta effettivamente di tipi diversi: non è possibile sovrapporre perfettamente tutte e tre le dita pollice, indice e medio delle mani destra e sinistra, disposte a formare angoli ortogonali tra loro, comunque ruotiamo le mani: riusciamo sempre a sovrapporne due, ma il terzo dito risulta sempre di verso opposto tra una mano e l'altra.

Ora, l'importante risultato che si può dimostrare è che, se stiamo usando una base destrorsa, allora il vettore rappresentato da $x \wedge y$ ha verso tale che i tre vettori rappresentati da x, y e $x \wedge y$ sono, nell'ordine, ancora orientati "in modo destrorso" (ovvero come pollice, indice e medio della mano destra), mentre se usiamo una base sinistrorsa, allora i tre vettori rappresentati da x, y e $x \wedge y$ sono, nell'ordine, ancora orientati "in modo sinistrorso" (ovvero come pollice, indice e medio della mano sinistra).



Nella maggior parte dei testi si sceglie di usare basi ortonormali destrorse: si dice allora, soprattutto nei testi di fisica, che il prodotto vettoriale è definito usando la *regola della mano destra*.

Nell'ultima parte di questo capitolo vedremo come le nozioni e le formule viste in questo paragrafo (coordinate, prodotto scalare, prodotto vettoriale etc.) ci consentiranno di impostare e risolvere in modo efficiente problemi geometrici relativi a rette e piani nello spazio. Prima di fare ciò, fermiamoci a esaminare da un punto di vista più astratto e puramente algebrico la nozione stessa di vettore.

1.4 Spazi vettoriali

Come abbiamo visto, i vettori geometrici sono degli oggetti che possono essere sommati tra loro e moltiplicati per un numero reale, ed è usando queste operazioni e le proprietà (1.1)-(1.8) che esse soddisfano che siamo riusciti a introdurre importanti concetti, come quello di coordinate, ricavandone importanti proprietà.

Ora, il fatto notevole è che in matematica e nelle sue applicazioni esistono molti altri insiemi, composti da elementi di natura molto diversa dai vettori geometrici, che si comportano tuttavia in modo analogo a questi ultimi, ovvero che possono essere in un certo senso sommati tra loro e moltiplicati per un numero reale, e che soddisfano proprietà analoghe a quelle viste nelle (1.1)-(1.8).

Ad esempio, si consideri l'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: chiaramente, due funzioni possono essere sommate tra loro per ottenere una nuova funzione (ad esempio, se $f(x) = x^2$, e $g(x) = e^x$, la funzione che a ogni $x \in \mathbb{R}$ associa $x^2 + e^x$ costituisce una nuova funzione, che può essere pensata come la somma $f + g$), e una funzione può essere moltiplicata per un numero reale per ottenere una nuova funzione (ad esempio, data $f(x) = x^2$, la funzione che a ogni $x \in \mathbb{R}$ associa $2x^2$ può essere pensata come la funzione $2f$).

Queste operazioni, come è facile verificare, soddisfano proprietà analoghe alle (1.1)-(1.8) viste per i vettori geometrici: ad esempio, è chiaro che la somma di funzioni gode della proprietà commutativa (facendo riferimento all'esempio di sopra, $x^2 + e^x = e^x + x^2$); o ancora, per quello che riguarda la proprietà (1.3), esiste una funzione che funge da elemento neutro per la somma (la funzione costante uguale a zero) e così via per tutte le altre proprietà.

Un altro esempio di insieme che si comporta in modo analogo ai vettori geometrici, che è di fondamentale importanza in matematica e come vedremo in particolare in questo corso, è quello dell'*insieme delle n-uple di numeri reali.*

Dato un numero naturale positivo n, una n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è una sequenza ordinata di n numeri reali $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: ad esempio, per $n = 2$ e $n = 3$ si ottengono rispettivamente le coppie (x_1, x_2) e le terne (x_1, x_2, x_3), che abbiamo già introdotto parlando di coordinate di vettori geometrici nel piano o nello spazio tridimensionale. Lungi dal rappresentare una generalizzazione astratta delle coppie o delle terne senza più significato concreto o utilità, le n-uple possono modellizzare oggetti e situazioni "reali" le più diverse tra loro: ad esempio, in fisica ogni evento dello spaziotempo è rappresentato da una 4-upla (x_1, x_2, x_3, x_4), dove le prime tre componenti x_1, x_2, x_3 sono le coordinate del punto in cui avviene l'evento e l'ultima componente x_4 ci dice in quale istante di tempo esso avviene; ancora, la configurazione di un braccio meccanico con n giunture può essere rappresentata da una n-upla in cui ogni componente ci dice l'angolo che formano i bracci nella giuntura corrispondente; oppure, se avessimo un mercato composto da 10 merci, la situazione dei prezzi in quel mercato può essere rappresentata da una 10-upla $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ in cui ciascuna componente ci dice il prezzo della merce

corrispondente (x_1 della prima merce, x_2 della seconda, e così via).
Ora, sull'insieme delle n-uple di numeri reali, che si denota $\mathbb{R}^n$, possiamo definire un'operazione di somma tra due n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sommando componente per componente

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad (1.26)$$

e un'operazione di prodotto di un numero reale $c \in \mathbb{R}$ per una n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ moltiplicando per c tutte le componenti della n-upla:

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) \quad (1.27)$$

(nel caso delle coppie o delle terne, queste due operazioni sono proprio quelle che traducono in coordinate, come affermano la Proposizione 1.5 e l'Osservazione 1.7, la somma e il prodotto per uno scalare di vettori geometrici).

Come è facile vedere, queste due operazioni verificano proprietà analoghe alle proprietà (1.1)-(1.8) che hanno somma e prodotto per un numero reale dei vettori geometrici. Ad esempio, sempre in riferimento alla proprietà (1.3), la n-upla che funge da elemento neutro per la somma è la n-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ che ha tutte le componenti nulle, in quanto chiaramente

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

In altre parole, la n-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ ha in $\mathbb{R}^n$ lo stesso ruolo che il vettore $\vec{OO}$ ha nell'insieme dei vettori applicati o la funzione costante uguale a zero nell'insieme delle funzioni.

Queste analogie suggeriscono che possiamo dare una definizione generale, astratta, che comprenda come casi particolari gli esempi appena visti. Il vantaggio di tale impostazione è che possiamo studiare una volta per tutte le proprietà di questi insiemi senza doverle vedere nei singoli casi: un teorema dimostrato in generale nel caso astratto risulta poi vero per tutti gli esempi di questo tipo di struttura. Diamo allora la seguente

Definizione 1.11. Uno *spazio vettoriale reale* (o $\mathbb{R}$-*spazio vettoriale*) è un insieme su cui siano definite un'operazione di somma tra gli elementi di V e un'operazione di prodotto tra numeri reali e elementi di V in modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

(1) La somma è *associativa*, cioè per ogni $v_1, v_2, v_3 \in V$ si ha

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

(2) La somma è *commutativa*, cioè per ogni $v_1, v_2 \in V$ si ha

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

(3) esiste un elemento di V, denotato $\bar{0}$ e chiamato *vettore nullo*, tale che

$$v + \bar{0} = \bar{0} + v = v$$

(ovvero $\bar{0}$ è l'elemento neutro per la somma data su V)

(4) per ogni $v \in V$, l'elemento $(-1)v$ è il suo *opposto rispetto alla somma* o inverso additivo:

$$v + (-1)v = (-1)v + v = \bar{0}$$

(5) Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, vale

$$c_1(c_2v) = (c_1c_2)v$$

(6) Per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, vale

$$(c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$$

(7) Per ogni $c \in \mathbb{R}$ e ogni $v_1, v_2 \in V$, vale

$$c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$$

(8) Per ogni $v \in V$, si ha

$$1v = v$$

Gli elementi di uno spazio vettoriale V si chiamano *vettori*; per contrapposizione, in questo contesto i numeri reali si chiamano anche *scalari*.
Un vettore cv ottenuto moltiplicando v per uno scalare c si dice *proporzionale a* v o *multiplo di* v.

Quindi sono spazi vettoriali reali gli insiemi V_O^2 e V_O^3 dei vettori geometrici rispettivamente limitati nel piano o liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale, l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple di numeri reali, e l'insieme di tutte le funzioni reali di variabile reale.

Osservazione 1.12. Come già visto nel caso particolare dei vettori geometrici, osserviamo che grazie alle proprietà (1)-(8) di sopra possiamo manipolare le espressioni contenenti vettori nel modo in cui manipoliamo solitamente le espressioni algebriche tra numeri, e in particolare ad esempio in uno spazio vettoriale si possono "spostare i vettori" da un membro all'altro di un'uguaglianza cambiandoli di segno. Più precisamente, da un'espressione del tipo $v_1 + v_2 = v_3$ posso passare a $v_1 = v_3 - v_2$ (dove stiamo scrivendo $v_3 - v_2$ come forma semplificata di $v_3 + (-1)v_2$) nel modo seguente:
sommiamo a entrambi i membri di $v_1 + v_2 = v_3$ il vettore $(-1)v_2$:

$$(v_1 + v_2) + (-1)v_2 = v_3 + (-1)v_2$$

Applichiamo la proprietà associativa della somma (la (1) della Definizione 1.11) a primo membro:

$$v_1 + (v_2 + (-1)v_2) = v_3 + (-1)v_2$$

Applichiamo la proprietà (4) che afferma che $(-1)v_2$ è l'opposto di v_2:

$$v_1 + \bar{0} = v_3 + (-1)v_2$$

e infine applichiamo la (3) che ci dice che il vettore nullo funge da elemento neutro:

$$v_1 = v_3 + (-1)v_2.$$

Per un altro esempio di proprietà vera nel caso dei vettori geometrici e che in realtà vale in qualunque spazio vettoriale, consideriamo la $0\vec{OP} = \vec{OO}$, che discendeva dalla definizione stessa di prodotto di un numero reale per un vettore geometrico: infatti, dal momento che in generale $c\vec{OP}$ denota un vettore avente lunghezza uguala a $|c|$ volte la lunghezza di $\vec{OP}$, questo implica che $0\vec{OP}$ abbia lunghezza zero, e quindi sia il vettore geometrico $\vec{OO}$ "schiacciato" sul punto O.
Ebbene, mostriamo ora che in realtà l'uguaglianza analoga $0v = \bar{0}$ vale per ogni vettore v di un qualunque spazio vettoriale V: infatti, si ha

$$0v = (1 + (-1))v = 1v + (-1)v = v + (-1)v = \bar{0}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato la proprietà (6) della Definizione 1.11, nella terza uguaglianza la proprietà (8) e nell'ultima uguaglianza la proprietà (4).
Quindi, il fatto che moltiplicando per 0 un vettore si ottenga il vettore nullo si rivela essere una proprietà che non dipende da come stiamo definendo il prodotto nello specifico caso ma semplicemente dalle proprietà algebriche della definizione generale di spazio vettoriale.

Osservazione 1.13. Nella definizione di spazio vettoriale data sopra abbiamo supposto che gli elementi dello spazio V possano essere moltiplicati per numeri reali, e per questo motivo abbiamo parlato di spazio vettoriale *reale*. Analogamente, esistono gli spazi vettoriali *complessi*, per i quali la definizione è identica a quella data nella Definizione 1.11 con l'unica differenza che i vettori possono essere moltiplicati per numeri complessi anzichè reali.

Ricordiamo che un numero complesso è un'espressione del tipo $a + bi$, essendo a, b numeri reali e i un nuovo numero, detto *unità immaginaria*, con la proprietà (non soddisfatta da nessun numero reale) che $i^2 = -1$.
Ad esempio, $2+3i, \pi-\sqrt{2}i$ sono numeri complessi; dato un numero complesso $z = a + bi$, il numero reale a si dice *parte reale* di z, mentre il numero reale b (essendo il coefficiente davanti all'unità immaginaria) si dice *parte immaginaria* di z. La parte immaginaria b può anche essere uguale a zero: in tal caso il numero complesso $a + bi$ coincide con il numero reale a (quindi ogni numero reale può essere pensato come un particolare numero complesso con parte immaginaria nulla). L'insieme dei numeri complessi si denota $\mathbb{C}$.
I numeri complessi possono essere sommati semplicemente sommando le rispettive parti reali e immaginarie. Ad esempio

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i = 6 + 8i.$$

Per moltiplicare due numeri complessi, basta prima eseguire il prodotto come se si trattasse di un'espressione algebrica letterale in cui la i è una indeterminata

$$(2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5i + 3i \cdot 4 + 3i \cdot 5i = 8 + 10i + 12i + 15i^2$$

e poi semplificarla ricordando che $i^2 = -1$ e sommando i termini simili:

$$8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 + 22i - 15 = -7 + 22i.$$

Non è difficile vedere che le operazioni di somma e prodotto così definite verificano le usuali proprietà verificate da somma e prodotto di numeri reali: proprietà associativa e commutativa, esistenza di elementi neutri (il numero 0, con la proprietà che $z + 0 = 0 + z = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, e il numero 1, con la proprietà che $z1 = 1z = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$), proprietà distributiva.
Inoltre, esattamente come succede per i numeri reali, ogni numero complesso $a+bi$ diverso da zero (ovvero per cui a e b non sono entrambi nulli) ammette un inverso moltiplicativo, ovvero un numero complesso che moltiplicato per $a + bi$ dà come risultato 1. Più precisamente, l'inverso di $a + bi$ è il numero complesso

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

Per verificare tale affermazione, è sufficiente moltiplicare tra loro $a + bi$ e $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ e verificare che il risultato sia uguale a 1. Riscrivendo $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ come $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$ si vede subito che

$$a + bi \cdot \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{(a + bi)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 i^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

(nella seconda uguaglianza abbiamo usato l'identità notevole $(X + Y)(X - Y) = X^2 - Y^2$, mentre nella terza il fatto che $i^2 = -1$).
Ad esempio, se $a + bi = 2 + 3i$, ovvero $a = 2, b = 3$, si ha $a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ e quindi

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

è l'inverso di $2 + 3i$.
Riassumendo, i numeri complessi hanno quindi in comune con i numeri reali le seguenti proprietà:

(1) La somma e il prodotto godono entrambi delle proprietà associativa e commutativa

(2) Esiste un elemento neutro per la somma e un elemento neutro per il prodotto

(3) ogni numero a ammette un inverso additivo $-a$, tale che $a + (-a) = (-a) + a = 0$

(4) ogni numero a *diverso da* 0 ammette un inverso moltiplicativo a^{-1}, tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

(5) vale la proprietà distributiva

Un qualunque insieme numerico le cui operazioni di somma e prodotto godano di queste proprietà si dice un *campo numerico* (o semplicemente campo). Solitamente un campo si denota con la lettera $\mathbb{K}$. Dal momento che per la maggior parte della nostra trattazione degli spazi vettoriali, che siano reali o complessi, useremo solo il fatto che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi, ovvero hanno le proprietà dette, non abbiamo nessun motivo nelle nostre dimostrazioni di distinguere tra il caso complesso e quello reale: possiamo tranquillamente parlare di *spazio vettoriale definito su un campo* $\mathbb{K}$ e dimostrare le nostre formule supponendo che gli scalari appartengano a $\mathbb{K}$, che potrebbe essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ senza che questo modifichi nulla rispetto alle dimostrazioni stesse.

L'esempio più importante di spazio vettoriale complesso è l'insieme $\mathbb{C}^n$ di tutte le n-uple $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ di numeri complessi $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, sul quale le operazioni di somma di n-uple e prodotto di una n-upla per uno scalare sono definite esattamente come in $\mathbb{R}^n$

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) := (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots, z_n + w_n) \quad (1.28)$$

$$c(z_1, z_2, \ldots, z_n) := (cz_1, cz_2, \ldots, cz_n) \quad (1.29)$$

con l'unica differenza che ora lo scalare c appartiene al campo dei numeri complessi.

Ora, vogliamo mostrare come alcune delle più importanti nozioni viste per i vettori geometrici, e in particolare quella di coordinate, possano essere date in qualunque spazio vettoriale.

Ricordiamo che nello spazio V_O^2 dei vettori applicati nel piano, il punto di partenza della definizione di coordinate consiste nel mostrare che, fissati due vettori $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$ non allineati, qualunque vettore $\vec{OP} \in V_O^2$ si può scrivere come loro combinazione $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$. Analogamente, nello spazio V_O^3 dei vettori applicati liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale, per poter definire le coordinate si mostra che, fissati tre vettori $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ e $\vec{OP}_3$ non appartenenti a uno stesso piano, qualunque vettore $\vec{OP} \in V_O^3$ può essere scritto come $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$.
A parte il diverso numero di vettori che serve per ottenere le coordinate in V_O^2 e in V_O^3, in entrambi i casi il punto di partenza è la possibilità di ottenere qualunque vettore dello spazio combinando un numero finito di vettori dati. Questo suggerisce la seguente definizione per un generico spazio vettoriale (definito su un qualunque campo $\mathbb{K}$):

Definizione 1.14. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ si dicono *generatori di* V se ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

per certi coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.

Un'espressione del tipo $x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n$ si dice *combinazione lineare dei vettori* $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Si può allora riformulare la Definizione 1.14 dicendo che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono generatori di V se ogni vettore dello spazio si può scrivere come loro combinazione lineare. Si dice anche che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *generano* V. Quindi, nello spazio V_O^2 due vettori non allineati danno un insieme di generatori; nello spazio V_O^3 un insieme di generatori è invece dato da tre vettori che non stiano sullo stesso piano.

La Definizione 1.14 potrebbe far pensare che a questo punto si possano definire le coordinate di un vettore v in uno spazio vettoriale V rispetto a un insieme di generatori fissato $v_1, \ldots, v_n$ semplicemente come i coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che appaiono nella combinazione lineare $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, ovvero ricalcando le Definizioni 1.2 e 1.4 date negli spazi V_O^2 e V_O^3.
In realtà, questo non è possibile in quanto sussiste un problema di unicità: la Definizione 1.14, da sola, non garantisce che i coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che servono per decomporre un vettore dato v come combinazione $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ di $v_1, v_2, \ldots, v_n$ siano univocamente determinati. In generale, infatti, un vettore può essere scritto in più modi diversi come combinazione di vettori dati: ad esempio, nello spazio $V = \mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali, consideriamo i vettori

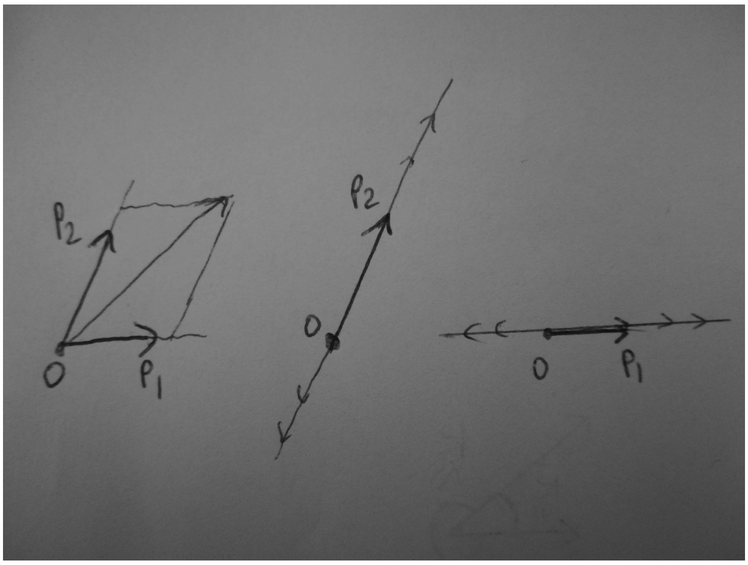
$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (0, 1), \quad v_3 = (1, 1)$$

e il vettore $v = (3, 2)$.
Ad esempio, si hanno le seguenti, differenti decomposizioni di v come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3:

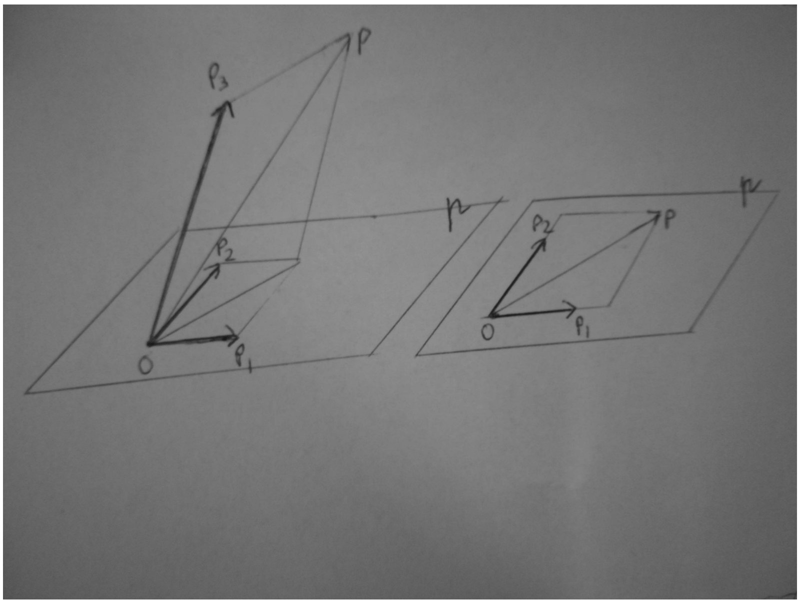
$$(3, 2) = 2(1, 0) + 1(0, 1) + 1(1, 1)$$
$$(3, 2) = 4(1, 0) + 3(0, 1) + (-1)(1, 1)$$

Il motivo per cui questo problema non si è verificato quando abbiamo definito le coordinate negli spazi V_O^2 e V_O^3 usando rispettivamente una coppia di vettori non allineati o a una terna di vettori non complanari, è che tali insiemi di generatori hanno una proprietà aggiuntiva rispetto alla Definizione 1.14: si tratta di *insiemi di generatori minimali*, in un senso che ora precisiamo e illustriamo.

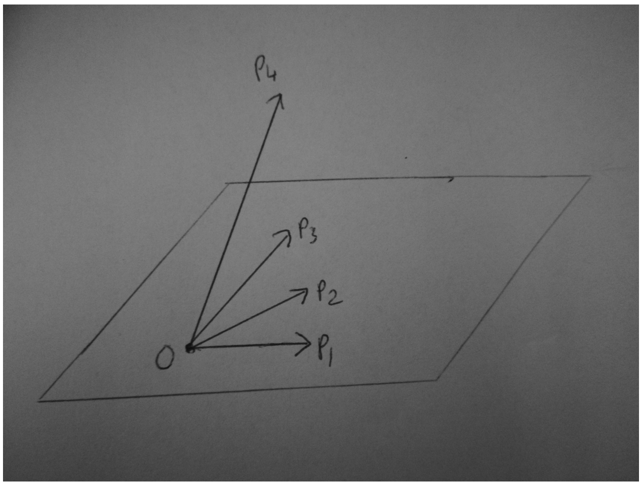
Come si vede nel disegno seguente, se dall'insieme di generatori di V_O^2 costituito da una coppia $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}$ di vettori non allineati eliminiamo uno qualunque dei due vettori, il vettore rimanente non genera più lo spazio, in quanto con esso riusciamo a ottenere (prendendo i suoi multipli) solo i vettori che stanno sulla retta a cui esso appartiene.



Analogamente, nello spazio V_O^3 dei vettori geometrici liberi di variare in tutto lo spazio tridimensionale, se dall'insieme di generatori costituito da una terna $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$ di vettori non complanari eliminiamo anche un solo vettore, i due vettori rimanenti non generano più lo spazio: ad esempio, eliminando $\vec{OP_3}$, le combinazioni lineari dei due vettori restanti $\vec{OP_1}$ e $\vec{OP_2}$ ci danno solo i vettori $\vec{OP}$ che stanno sul piano p del disegno



È in questo senso che tali sistemi di generatori sono minimali: in essi, nessun vettore è superfluo, nessuno può essere eliminato senza perdere la proprietà di generare lo spazio: vedremo tra poco che è esattamente questa la proprietà che garantisce l'unicità dei coefficienti della combinazione lineare in cui si decompone un vettore dato (e che ci consente quindi di definire in modo univoco le coordinate), ma prima dobbiamo chiarire meglio il concetto di minimalità di un insieme di generatori e in particolare capire quali dei vettori presenti in un insieme di generatori non minimale possano essere eliminati e quali no. Aiutiamoci con un esempio considerando nello spazio V_O^3 quattro vettori come nel disegno seguente



in cui $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$ appartengono a uno stesso piano, e $\vec{OP_4}$ si trova invece fuori da questo piano.
Da una parte, si può vedere che un qualunque vettore di V_O^3 può essere scritto come combinazione di questi quattro vettori, che costituiscono quindi un insieme di generatori di V_O^3; dall'altra, non si tratta di un insieme di generatori minimale nel senso spiegato sopra, in quanto alcuni vettori possono essere eliminati e i restanti continuano a generare lo spazio: ad esempio, possiamo eliminare $\vec{OP_1}$ e i vettori restanti $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$ e $\vec{OP_4}$ continuerebbero a generare lo spazio; lo stesso vale se ad esempio eliminiamo $\vec{OP_2}$, oppure se eliminiamo $\vec{OP_3}$; invece, se eliminiamo $\vec{OP_4}$ i vettori restanti $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$ non formano più un insieme di generatori (trovandosi tutti su uno stesso piano, le loro combinazioni darebbero solamente vettori che appartengono ancora a questo piano e non tutti quelli dello spazio).

Quindi, se un insieme di generatori non è minimale, è importante capire quali vettori possiamo effettivamente eliminare da esso. Il seguente risultato risponde proprio a questa domanda.

Proposizione 1.15. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ generatori dello spazio vettoriale V.

L'insieme $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ ottenuto eliminando v_i da $\{v_1, \dots, v_n\}$ è ancora un insieme di generatori se e solo se v_i si può scrivere come combinazione dei rimanenti.

Proof. Dobbiamo dimostrare due implicazioni: la prima, che se v_i è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ allora bastano $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ per generare V, e la seconda che se $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ sono generatori di V allora v_i si scrive come loro combinazione lineare.

Osserviamo subito che la seconda implicazione è ovvia, in quanto dire che $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ sono generatori di V significa che ogni vettore di V si scrive come loro combinazione lineare, e questo sarà in particolare vero per v_i.

Per dimostrare invece la prima implicazione, supponiamo che v_i si scriva come combinazione degli altri vettori di $\{v_1, \dots, v_n\}$, ovvero che esistano dei coefficienti $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n \tag{1.30}$$

e cerchiamo di dimostrare che $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ generano V, ovvero che ogni $v \in V$ si scrive come loro combinazione lineare. Noi sappiamo che tutti i vettori $v_1, \dots, v_n$ (compreso v_i) generano V, ovvero che ogni vettore v dello spazio V si scrive come loro combinazione lineare:

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_{i-1} v_{i-1} + c_i v_i + c_{i+1} v_{i+1} + \cdots + c_n v_n \tag{1.31}$$

Ma allora, sostituendo la (1.30) nella (1.31), si ottiene

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_{i-1} v_{i-1} + c_i (a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_n v_n) + c_{i+1} v_{i+1} + \cdots + c_n v_n \tag{1.32}$$

ovvero, facendo i conti e mettendo in evidenza i vettori,

$$v = (c_1 + c_i a_1) v_1 + \cdots + (c_{i-1} + c_i a_{i-1}) v_{i-1} + (c_{i+1} + c_i a_{i+1}) v_{i+1} + \cdots + (c_n + c_i a_n) v_n \tag{1.33}$$

da cui vediamo che ogni v dello spazio si riesce a scrivere come combinazione di $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$: questo dimostra che bastano tali vettori a generare lo spazio, come volevamo. □

La proposizione appena dimostrata suggerisce la seguente, importante

Definizione 1.16. Dato uno spazio vettoriale V, dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si dicono *linearmente indipendenti* se nessuno di loro si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti. In caso contrario (ovvero se almeno uno di loro si scrive come combinazione dei rimanenti) si dicono *linearmente dipendenti*.

Osservazione 1.17. Si noti che nel caso di due soli vettori v_1, v_2, questi sono dipendenti se e solo se non sono uno multiplo dell'altro. Infatti, in tal caso dire ad esempio che v_2 è combinazione lineare di v_1 significa semplicemente che $v_2 = cv_1$ per qualche scalare $c \in \mathbb{K}$.

Alla luce della Definizione 1.16 e della Proposizione 1.15, se i vettori di un insieme di generatori sono anche linearmente indipendenti allora nessuno di essi può essere eliminato se vogliamo continuare ad avere un insieme di generatori: in altre parole, in tal caso si ha proprio un insieme di generatori minimale nel senso di cui abbiamo parlato sopra.
Diamo allora la seguente, importantissima

Definizione 1.18. Un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V che siano anche linearmente indipendenti si dice *base* di V.

Vedremo ora che i sistemi di generatori per i quali è garantita l'unicità delle coordinate sono proprio le basi. A questo scopo, dimostriamo prima il seguente risultato, che fornisce una definizione alternativa equivalente di indipendenza lineare.

Proposizione 1.19. Dei vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se esistono dei coefficienti $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ non tutti uguali a zero e tali che $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = \bar{0}$.

Proof. Dobbiamo dimostrare due implicazioni.
Supponiamo dapprima che i vettori $v_1, \ldots, v_n$ siano dipendenti. Questo, in base alla Definizione 1.16, significa che uno di loro, diciamo v_i, si scrive come combinazione dei rimanenti, ovvero

$$v_i = c_1v_1 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n.$$

Allora, portando v_i a secondo membro si ottiene

$$c_1v_1 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} - v_i + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n = \bar{0}$$

Ma questa è proprio una combinazione lineare del tipo $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = \bar{0}$ con i coefficienti non tutti uguali a zero (il coefficiente di v_i è uguale a -1). Una implicazione è dimostrata.

Viceversa, supponiamo che esista una combinazione $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = \bar{0}$ con coefficienti non tutti nulli. Supponiamo che ad esempio sia $c_i \neq 0$. Allora, portando a secondo membro tutti gli addendi tranne c_iv_i si ha

$$c_i v_i = -c_1 v_1 - \cdots - c_{i-1} v_{i-1} - c_{i+1} v_{i+1} - \cdots - c_n v_n.$$

Essendo per ipotesi $c_i \neq 0$, possiamo dividere[6] entrambi i membri per c_i ottenendo

$$v_i = -\frac{c_1}{c_i} v_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i} v_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_i} v_n$$

che mostra che uno dei vettori (v_i) si scrive come combinazione dei rimanenti. Anche l'altra implicazione è dimostrata. □

Osservazione 1.20. La negazione dell'enunciato appena dimostrato è: dei vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono *indipendenti* se e solo se non è possibile trovare dei coefficienti $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ che non siano tutti nulli e tali che $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = \bar{0}$; in altre parole, se e solo se l'unica combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ che dà luogo al vettore nullo è quella che ha i coefficienti tutti uguali a zero.
Quindi, dimostrare che dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono indipendenti equivale a dimostrare l'implicazione

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = \bar{0} \Rightarrow c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$$

Siamo ora pronti a dimostrare la

Proposizione 1.21. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base dello spazio vettoriale V. Allora c'è un *unico* modo di scrivere ogni vettore $v \in V$ come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$.

Proof. Sicuramente ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$, in quanto $v_1, \ldots, v_n$ formano una base e quindi generano V.
Ora, supponiamo che si abbia contemporaneamente $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ e $v = c'_1 v_1 + \cdots + c'_n v_n$. Vogliamo dimostrare che $c_1 = c'_1, \ldots, c_n = c'_n$ ovvero che di combinazione lineare che dà v ce n'è una sola.
A questo scopo, essendo $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ e $c'_1 v_1 + \cdots + c'_n v_n$ entrambe uguali a v possiamo scrivere

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = c'_1 v_1 + \cdots + c'_n v_n.$$

[6]Questo è un esempio di passaggio che può essere fatto grazie al fatto che l'insieme degli scalari per cui moltiplichiamo i vettori è un campo, in quanto in un campo ogni elemento diverso da zero ammette un inverso moltiplicativo (il che equivale a dire che si può dividere per i coefficienti diversi da zero).

Portando tutto a primo membro si ha

$$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n - c'_1v_1 - \cdots - c'_nv_n = \bar{0}$$

ovvero, mettendo in evidenza i vettori,

$$(c_1 - c'_1)v_1 + \cdots + (c_n - c'_n)v_n = \bar{0}. \tag{1.34}$$

Quest'ultima uguaglianza rappresenta una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ uguale al vettore nullo. Ma dal momento che $v_1, \ldots, v_n$ formano una base, essi sono indipendenti e quindi, in base all'Osservazione 1.20, l'uguaglianza (1.34) può essere vera solo se i coefficienti $c_1 - c'_1, \ldots, c_n - c'_n$ sono tutti uguali a zero, da cui $c_1 = c'_1, \ldots, c_n = c'_n$, come volevamo dimostrare. □

La Proposizione 1.21 ci consente allora di dare finalmente la seguente

Definizione 1.22. Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Per ogni vettore $v \in V$, si dicono *coordinate di v rispetto a B* i coefficienti $c_1, \ldots, c_n$ dell'unica combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ uguale a v:

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n.$$

La n-upla $(c_1, \ldots, c_n)$ formata da tali coefficienti si chiama *n-upla delle coordinate di v rispetto a B*.

Ecco quindi spiegato perché nel caso dei vettori geometrici l'unicità delle coordinate era garantita: gli insiemi di generatori scelti (due vettori non allineati nel caso di V_O^2 e tre vettori non complanari nel caso di V_O^3) erano anche indipendenti, e quindi costituivano una base.
Infatti, nel caso di V_O^2 richiedere che i due vettori non siano allineati equivale a richiedere che non siano multipli l'uno dell'altro, che come sappiamo dall'Osservazione 1.17 equivale (nel caso di due soli vettori) a dire che sono indipendenti; analogamente, nel caso di V_O^3, richiedere che i tre vettori non stiano sullo stesso piano equivale a dire che nessuno di loro si trova sul piano degli altri due, ovvero nessuno di loro è combinazione degli altri due.

Come già visto nel caso particolare dei vettori geometrici, l'importanza delle coordinate consiste nel fatto che esse ci consentono di rappresentare i vettori mediante n-uple di numeri, e ci permettono quindi di tradurre in un calcolo numerico i calcoli tra vettori.
Vediamo ora che proprietà come quelle viste nella Proposizione 1.5 per lo spazio dei vettori geometrici valgono in realtà per qualunque spazio vettoriale. Denotiamo $f_B : V \to \mathbb{K}^n$ la funzione che associa a ogni vettore $v \in V$ la n-upla delle sue coordinate rispetto alla base B, e mostriamo che

$$f_B(v + v') = f_B(v) + f_B(v') \tag{1.35}$$

$$f_B(cv) = cf_B(v) \tag{1.36}$$

ovvero, in altre parole, le coordinate della somma $v + v'$ di due vettori si ottengono semplicemente sommando le coordinate di v con quelle di v'; mentre le coordinate del multiplo cv di un vettore si ottengono semplicemente moltiplicando per c le coordinate di v.
Per mostrare la (1.35), supponiamo che sia $f_B(v) = (x_1, \ldots, x_n)$ e $f_B(v') = (x'_1, \ldots, x'_n)$: questo per definizione di coordinate rispetto a una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, significa che $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ e che $v' = x'_1v_1 + \cdots + x'_nv_n$. Ma allora

$$v + v' = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n + x'_1v_1 + \cdots + x'_nv_n =$$

ovvero, mettendo in evidenza i vettori,

$$v + v' = (x_1 + x'_1)v_1 + \cdots + (x_n + x'_n)v_n.$$

Questa uguaglianza ci dice che le coordinate di $v + v'$ rispetto alla base B sono $x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n$, e quindi

$$f_B(v+v') = (x_1+x'_1, \ldots, x_n+x'_n) = (x_1, \ldots, x_n)+(x'_1, \ldots, x'_n) = f_B(v)+f_B(v')$$

come volevamo.
Analogamente, per dimostrare la (1.36), supponiamo che sia $f_B(v) = (x_1, \ldots, x_n)$: questo per definizione di coordinate rispetto a una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, significa che $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Ma allora

$$cv = c(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = cx_1v_1 + \cdots + cx_nv_n =$$

il che ci dice che le coordinate di cv rispetto alla base B sono $cx_1, \ldots, cx_n$, ovvero

$$f_B(cv) = (cx_1, \ldots, cx_n) = c(x_1, \ldots, x_n) = cf_B(v)$$

come volevamo.

Come ulteriore, significativo esempio di come un problema sui vettori possa essere tradotto in coordinate, dimostriamo la seguente

Proposizione 1.23. *Sia B una base di uno spazio vettoriale V. Dei vettori $v_1, \ldots, v_m \in V$ sono dipendenti se e solo se lo sono le n-uple $f_B(v_1), \ldots, f_B(v_m) \in \mathbb{K}^n$ delle coordinate rispetto a B.*

Proof. Supponiamo che $v_1, \dots, v_m$ siano dipendenti, ovvero che esista una loro combinazione lineare $c_1v_1 + \cdots + c_mv_m = \bar{0}$ uguale al vettore nullo con coefficienti $c_1, \dots, c_m$ non tutti uguali a zero. Allora, si ha[7]

$$f_B(c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = f_B(\bar{0}) = (0, \dots, 0)$$

ovvero, applicando le proprietà (1.35) e (1.36) di sopra,

$$c_1f_B(v_1) + \cdots + c_mf_B(v_m) = (0, \dots, 0)$$

che è una combinazione lineare di $f_B(v_1), \dots, f_B(v_m)$ uguale al vettore nullo di $\mathbb{K}^n$ con coefficienti $c_1, \dots, c_m$ non tutti uguali a zero: quindi $f_B(v_1), \dots, f_B(v_m)$ sono dipendenti.

Viceversa, se $f_B(v_1), \dots, f_B(v_m)$ sono dipendenti in $\mathbb{K}^n$, allora esiste una loro combinazione lineare $c_1f_B(v_1) + \cdots + c_mf_B(v_m) = (0, \dots, 0)$ uguale al vettore nullo con coefficienti $c_1, \dots, c_m$ non tutti uguali a zero, e sempre per le proprietà (1.35) e (1.36) si può scrivere

$$f_B(c_1v_1 + \cdots + c_mv_m) = (0, \dots, 0)$$

che ci dice che $c_1v_1+\cdots+c_mv_m$ ha coordinate tutte nulle, e quindi è il vettore nullo:

$$c_1v_1 + \cdots + c_mv_m = \bar{0}$$

Quindi abbiamo ottenuto una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$ uguale al vettore nullo con coefficienti $c_1, \dots, c_m$ non tutti uguali a zero, ovvero $v_1, \dots, v_m$ sono dipendenti. $\square$

Come mostra già l'esempio dei vettori geometrici, uno spazio vettoriale fissato ha in generale infinite basi (ad esempio, in V_O^2 è possibile scegliere in infiniti modi coppie di vettori geometrici non allineati). Tuttavia, si può dimostrare l'importantissimo fatto che due basi diverse di uno stesso spazio vettoriale hanno comunque sempre lo stesso numero di elementi:

Teorema/Definizione 1.24. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ due sue basi. Allora $m = n$.
Il numero di vettori contenuto in una qualunque base di V si dice la *dimensione di V* e si denota $\dim(V)$.

[7] Si noti che il vettore nullo $\bar{0}$ ha sempre coordinate tutte uguali a zero rispetto a qualunque base $B = \{w_1, \dots, w_n\}$, in quanto $\bar{0} = 0w_1 + \cdots + 0w_n$.

Quindi, la dimensione dello spazio V_O^2 dei vettori geometrici applicati nel piano è 2; la dimensione dello spazio vettoriale V_O^3 dei vettori geometrici applicati nello spazio è 3 (questo giustifica anche i numeri 2 e 3 che abbiamo usato per denotarli).
Per quello che riguarda lo spazio $\mathbb{K}^n$ (dove $\mathbb{K}$ è un qualunque campo, per esempio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), possiamo dimostrare che esso ha dimensione n.
Infatti, secondo la definizione di dimensione, basta trovare una base di $\mathbb{K}^n$ e vedere se essa ha n elementi.
Consideriamo il seguente insieme di vettori di $\mathbb{K}^n$:

$$v_1 = (1, 0, \dots, 0),\ v_2 = (0, 1, \dots, 0),\ \dots\ , v_n = (0, 0, \dots, 1)$$

(ovvero v_k ha 1 nella k-esima entrata e 0 in tutte le altre).
Se riusciamo a mostrare che $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base, avremo dimostrato che $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
A questo scopo, dobbiamo dimostrare che $v_1, v_2, \dots, v_n$ generano lo spazio $\mathbb{K}^n$, e poi che sono tra loro indipendenti. Per dimostrare che generano, dobbiamo far vedere che ogni vettore dello spazio, cioè ogni n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, può essere scritta come loro combinazione lineare. Ma questo ce lo dice l'uguaglianza

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \dots, 1)$$

(che può essere verificata semplicemente facendo i calcoli a secondo membro).
Per verificare che i vettori sono linearmente indipendenti, come abbiamo visto nell'Osservazione 1.20, dobbiamo verificare che se una loro combinazione lineare è uguale al vettore nullo:

$$c_1(1, 0, \dots, 0) + c_2(0, 1, \dots, 0) + \cdots + c_n(0, 0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0) \quad (1.37)$$

allora i coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_n$ sono necessariamente tutti uguali a zero. Ma questo si vede notando che, facendo i calcoli a primo membro, la (1.37) si scrive

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

che implica proprio $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$, come volevamo.
Vediamo ora, senza dimostrarli, alcuni importanti fatti sulla dimensione riassunti nel seguente enunciato:

Teorema 1.25. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Allora, valgono le seguenti:

(1) Dati vettori $v_1, \ldots, v_m \in V$, se $m < n$ allora $v_1, \ldots, v_m$ sicuramente non generano V

(2) Dati vettori $v_1, \ldots, v_m \in V$, se $m > n$ allora $v_1, \ldots, v_m$ sono necessariamente dipendenti

(3) Dati vettori $v_1, \ldots, v_m \in V$, se $m = n$ allora $v_1, \ldots, v_m$ sono generatori di V se e solo se sono linearmente indipendenti.

La prima affermazione può essere interpretata dicendo che la dimensione è il minimo numero di vettori necessario per generare lo spazio; la seconda dicendo che la dimensione è il massimo numero di vettori indipendenti possibile; la terza affermazione ci dice che se sappiamo già che la dimensione di uno spazio è n, allora per verificare se un insieme di n vettori è una base basta verificare se sono indipendenti, e automaticamente risulteranno anche generatori (o, viceversa, basta verificare che sono generatori e automaticamente saranno anche indipendenti).

Concludiamo questa parte relativa agli spazi vettoriali con una nozione che ci consentirà di ottenere ulteriori esempi di spazi vettoriali: la nozione di *sottospazio*.
Così come un sottoinsieme S di un insieme X è un insieme i cui elementi sono in particolare elementi di X, e quindi contenuto in X, un *sottospazio* W di uno spazio vettoriale V è uno spazio vettoriale contenuto in uno spazio vettoriale più grande V.
Per dare una definizione più precisa, iniziamo con l'osservare che se W è contenuto in V i suoi vettori devono essere in particolare vettori di V, ovvero $W \subseteq V$ (W è un sottoinsieme di V).
In secondo luogo, affinchè tale sottoinsieme sia uno spazio vettoriale a sè stante, indipendentemente da V, deve accadere che la somma di due vettori di W deve ancora stare in W, e analogamente il multiplo di ogni vettore di W deve ancora stare in W: in simboli,

(i) $w, w' \in W \Rightarrow w + w' \in W$ (si dice che W *è chiuso rispetto alla somma*).

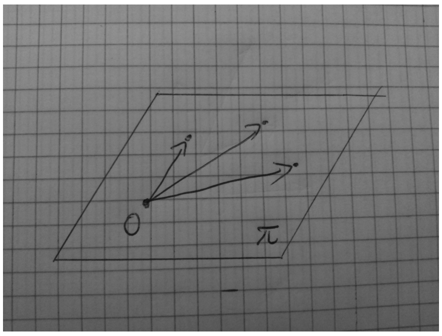
(ii) se $w \in W$ e $c \in \mathbb{K} \Rightarrow cw \in W$ (si dice che W *è chiuso rispetto al prodotto per scalari*).

Ora, mostriamo che il fatto che $W \subseteq V$ e queste due proprietà di chiusura sono tutto quello che serve per garantire che W sia uno spazio vettoriale, ovvero che soddisfi le proprietà (1)-(8) della Definizione 1.11 di spazio vettoriale.

Infatti, le proprietà (1), (2), (5), (6), (7), (8) della Definizione 1.11 sono verificate in quanto tali proprietà valgono in generale per tutti i vettori di V e quindi in particolare per quelli di W, che stanno dentro V (stiamo usando il fatto che W è un sottoinsieme di V).
Per quello che riguarda le proprietà (3) e (4), cioè l'esistenza *dentro* W del vettore nullo e dell'opposto, esse valgono come conseguenza della chiusura di W rispetto al prodotto per scalari: infatti, per ogni $w \in W$ e ogni $c \in \mathbb{K}$ sappiamo che $cw \in W$, quindi scegliendo in particolare $c = 0$ otteniamo $0w = \bar{0} \in W$, mentre scegliendo in particolare $c = -1$ abbiamo $(-1)w \in W$ il che ci assicura della validità, dentro W, delle proprietà (3) e (4) (si noti che per mostrare che $\bar{0} \in W$ abbiamo moltiplicato per 0 un vettore $w \in W$, il che richiede che W sia un sottoinsieme non vuoto).
Riassumendo, possiamo dare la seguente:

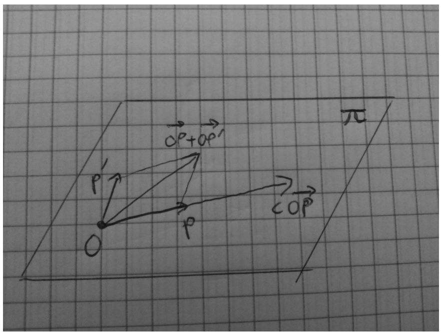
Definizione 1.26. Un sottoinsieme (non vuoto) $W \subseteq V$ di uno spazio vettoriale V si dice *sottospazio vettoriale di* V se sono soddisfatte le due condizioni (i) e (ii) di chiusura rispetto alla somma e rispetto al prodotto per scalari.

Esempio 1.27. Per vedere subito un esempio di sottospazio, sia $V = V_O^3$ lo spazio vettoriale dei vettori geometrici dello spazio tridimensionale applicati in O.
Fissato un piano π che passa per O, consideriamo il sottoinsieme $W \subseteq V$ costituito da tutti i vettori $\vec{OP}$ il cui secondo estremo P appartiene al piano π (o, detto in altre parole, da tutti i vettori $\vec{OP}$ che giacciono interamente su π).

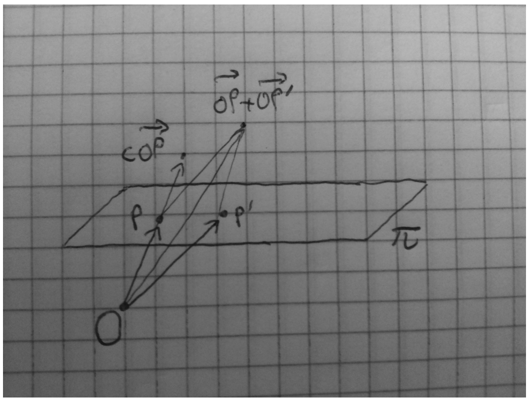


Allora, è facile vedere che W è un sottospazio di V: infatti, se prendo due vettori $\vec{OP}, \vec{OP'} \in W$, ovvero tali che $P, P' \in \pi$, la loro somma $\vec{OP} + \vec{OP'}$ appartiene ancora a W, in quanto è data dalla diagonale del parallelogramma che ha $\vec{OP}, \vec{OP'}$ come lati: essendo il parallelogramma una figura piana, essa sta nello stesso piano in cui stanno $\vec{OP}, \vec{OP'}$, cioè π. Quindi W è chiuso rispetto alla somma.

Analogamente, W è chiuso rispetto al prodotto per scalari: se $\vec{OP} \in W$, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$ anche $c\vec{OP} \in W$ in quanto tale vettore si ottiene semplicemente aumentando o diminuendo la lunghezza di $\vec{OP}$ (e eventualmente cambiandone il verso se $c < 0$), facendo la qual cosa non usciamo dal piano su cui sta $\vec{OP}$, cioè π.

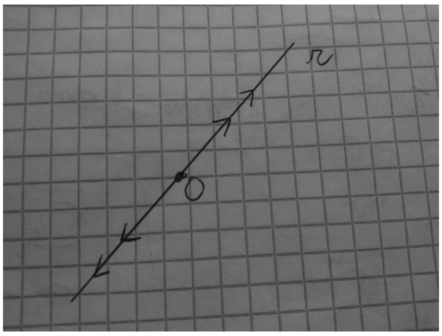


Se il piano π non passasse per O, il sottoinsieme W costituito da tutti i vettori $\vec{OP}$ il cui secondo estremo P appartiene al piano π non sarebbe un sottospazio: infatti, come si vede dal disegno

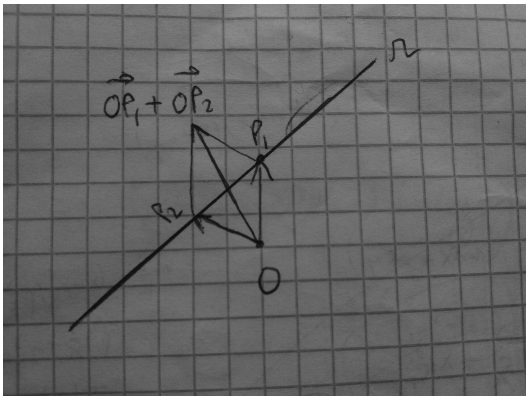


sommando due vettori che hanno secondo estremo in π si ottiene un vettore che ha secondo estremo fuori da π (il parallelogramma non è più, come prima, contenuto nel piano ma lo taglia trasversalmente) e quindi $\vec{OP} + \vec{OP'} \notin W$ pur essendo $\vec{OP}, \vec{OP'} \in W$: cioè W non è chiuso rispetto alla somma. Questo basterebbe già a dire che W non è un sottospazio, in ogni caso si vede che esso non è chiuso neanche rispetto al prodotto per scalari: moltiplicando un vettore $\vec{OP}$ per uno scalare c, in generale il secondo estremo del vettore va a cascare fuori da π.

Analogamente, se $V = V_O^3$ o $V = V_O^2$ possiamo invece che un piano fissare una retta r che passa per O e considerare il sottoinsieme $W \subseteq V$ costituito da tutti i vettori $\vec{OP}$ il cui secondo estremo P appartiene alla retta r (o, detto in altre parole, da tutti i vettori $\vec{OP}$ che giacciono interamente su r).



Allora, come prima è facile vedere che W è un sottospazio di V: infatti, se prendo due vettori $\vec{OP}, \vec{OP'}$ che giacciono sulla retta la loro somma $\vec{OP}+\vec{OP'}$ continua a giacere sulla retta, ovvero W è chiuso rispetto alla somma; e analogamente, se $\vec{OP}$ giace sulla retta, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$ anche $c\vec{OP}$ giace sulla retta, cioè W è chiuso rispetto al prodotto per scalari:
Come nel caso dei piani, se la retta r non passasse per O, il sottoinsieme W costituito da tutti i vettori $\vec{OP}$ il cui secondo estremo P appartiene alla retta non sarebbe un sottospazio: infatti, come si vede dal disegno



sommando due vettori che hanno secondo estremo in r si ottiene un vettore che ha secondo estremo fuori da r, cioè W non è chiuso rispetto alla somma.

Il seguente risultato ci dà un modo di ottenere sottospazi in qualunque spazio vettoriale V.

Teorema/Definizione 1.28. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$. Il sottoinsieme di V costituito da tutte le combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_n$

$$\{c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

è un sottospazio vettoriale di V, detto *sottospazio generato da* $v_1, \ldots, v_n$ e denotato $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

Proof. Dobbiamo verificare che $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
Per verificare la prima condizione, dobbiamo dimostrare che se $w, w' \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ allora $w + w' \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$. Ma dire che $w, w' \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ significa che

$$w = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n, \quad w' = c_1'v_1 + \cdots + c_n'v_n$$

da cui

$$w + w' = (c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) + (c_1'v_1 + \cdots + c_n'v_n) =$$

(mettendo in evidenza i vettori $v_1, \ldots, v_n$)

$$= (c_1 + c_1')v_1 + \cdots + (c_n + c_n')v_n$$

il che mostra che $w + w'$ si scrive come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ e quindi, per definizione, appartiene ancora a $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$. Quindi $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ è chiuso rispetto alla somma.

Per verificare che $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari, dobbiamo dimostrare che se $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ allora $cw \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, per ogni $c \in \mathbb{K}$. Ma, di nuovo, dire che $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ significa che $w = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ e quindi

$$cw = c(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = (cc_1)v_1 + \cdots + (cc_n)v_n$$

il che mostra che cw si scrive come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ e quindi, per definizione, appartiene ancora a $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$. Quindi $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari.
La dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 1.29. Se $v_1, \ldots, v_n$ fossero generatori di V, allora il sottospazio generato $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ coinciderebbe con tutto V, in quanto in quel caso *ogni* vettore di V si scrive come combinazione lineare $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$.

Esempio 1.30. Consideriamo ad esempio due vettori non proporzionali $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2$ nello spazio dei vettori geometrici applicati in un punto O dello spazio tridimensionale. Il sottospazio generato $\langle \vec{OP}_1, \vec{OP}_2\rangle$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari $c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ma in questo modo si ottengono tutti i possibili vettori che giacciono sul piano π che contiene $\vec{OP}_1$ e $\vec{OP}_2$: si tratta quindi dello stesso sottospazio descritto nell'Esempio 1.27.

Nel prossimo capitolo vedremo una nozione, quella di *rango di una matrice*, che ci permetterà di risolvere problemi quali il calcolo della dimensione o di una base del sottospazio generato da un insieme di vettori. Prima, concludiamo questo paragrafo citando il seguente risultato, che non dimostriamo.

Proposizione 1.31. Sia V uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un suo sottospazio. Allora $\dim(W) \leq \dim(V)$, e $\dim(W) = \dim(V)$ se e solamente se $V = W$.

La proposizione afferma quindi che in uno spazio vettoriale di dimensione n, l'unico sottospazio di dimensione n è lo spazio V stesso[8].

Osservazione 1.32. Tutti i risultati visti in questa parte sugli spazi vettoriali presuppongono che gli spazi vettoriali con cui lavoriamo ammettano un insieme di generatori formato da un numero finito di vettori. Questa condizione non è vera in generale per tutti gli spazi vettoriali: ad esempio, lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non può essere generato da un insieme finito di funzioni: si dice che tale spazio ha *dimensione infinita*.
Per vederlo, mostriamo che esso contiene un sottospazio di dimensione infinita (e quindi dovrà essere a maggior ragione di dimensione infinita anch'esso). Più precisamente, consideriamo l'insieme delle funzioni rappresentate da polinomi. Come sappiamo, i polinomi possono essere sommati tra loro (sommando i monomi simili, cioè aventi lo stesso grado) e moltiplicati per un numero reale (moltiplicando ogni monomio per quel numero):

$$(1 + 2x) + (x^2 + x) = x^2 + 3x + 1, \quad 3(x^2 + x) = 3x^2 + 3x.$$

Questo mostra che l'insieme dei polinomi (identificato con quello delle funzioni polinomiali) è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari ed quindi è un sottospazio dello spazio delle funzioni.
Ora, nessun insieme finito $\{P_1, \ldots, P_m\}$ di polinomi, per quanto grande, può generare tutto questo sottospazio. Infatti, se denotiamo d il più alto tra i gradi dei polinomi $P_1, \ldots, P_m$, combinando questi polinomi non si ottiene mai un polinomio di grado più alto di d (ad esempio, combinando tre polinomi di gradi 2,3,4 non si può ottenere un polinomio di grado più alto di 4). Quindi i polinomi di grado maggiore di d non possono essere scritti come combinazione lineare di $P_1, \ldots, P_m$, che di conseguenza non generano lo spazio.

In questo corso studieremo soprattutto gli spazi vettoriali di dimensione finita: le particolarità degli spazi di dimensione infinita, come ad esempio lo

[8] Si osservi infatti che, tra tutti i sottospazi di uno spazio vettoriale V c'è V stesso, in quanto esso è chiaramente chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

spazio delle funzioni, verranno studiate in corsi successivi (in particolare, nel corso di Analisi 2).

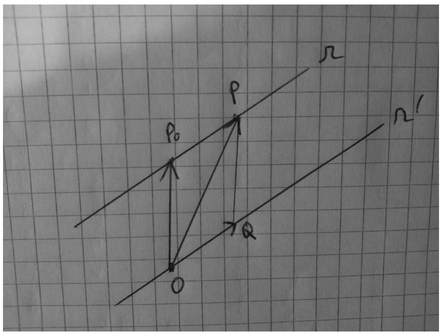
Osservazione 1.33. Un aspetto che abbiamo affrontato nel caso dei vettori geometrici ma non negli spazi vettoriali astratti è quello relativo alla lunghezza di un vettore e all'angolo tra due vettori: come vedremo in un capitolo successivo, in realtà anche queste nozioni possono essere introdotte nel contesto degli spazi vettoriali in generale, passando attraverso una generalizzazione del concetto di prodotto scalare visto nel Paragrafo 1.3.

1.5 Sistemi di riferimento nello spazio e equazioni di rette e piani

Vedremo ora come le nozioni di coordinate, prodotto scalare, combinazioni lineari, sottospazi etc. viste nei paragrafi precedenti ci consentono di impostare problemi geometrici e risolverli dopo averli tradotti in problemi numerici e equazioni.
Il punto di partenza di tutto ciò consiste nel definire la nozione di *coordinate di un punto.*
Per assegnare coordinate a un punto P (del piano o dello spazio) basta fissare prima di tutto un punto O, e poi una base B per i vettori applicati in O (sarà $B = \{\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}\}$ se siamo nello spazio tridimensionale e $B = \{\vec{OP_1}, \vec{OP_2}\}$ se siamo nel piano). Queste due scelte formano quello che si chiama un *sistema di riferimento* (nel piano o nello spazio), e O si dice *origine del sistema*
A questo punto, diciamo che le *coordinate del punto* P rispetto al sistema di riferimento fissato sono semplicemente le coordinate del vettore $\vec{OP}$ rispetto alla base scelta.
Scriveremo $P \equiv (x, y, z)$ (nel piano, $P \equiv (x, y)$) per dire che x, y, z (rispettivamente, x, y) sono le coordinate di P rispetto al sistema di riferimento fissato, ovvero, in base alla definizione appena data, $\vec{OP} = x\vec{OP_1}+y\vec{OP_2}+z\vec{OP_3}$ (rispettivamente, $\vec{OP} = x\vec{OP_1} + y\vec{OP_2}$).
Chiaramente, le coordinate di P dipendono fortemente sia dalla scelta iniziale dell'origine O (cambiando O, cambia il vettore $\vec{OP}$ di cui dobbiamo calcolare le coordinate) che dalla scelta della base: in effetti, il sistema di riferimento solitamente si sceglie in modo da semplificare il più possibile il problema che si vuole risolvere.

Ora, se fissato un sistema di riferimento ogni punto dello spazio (o del piano) ha una sua terna (rispettivamente, coppia) di coordinate, data una

retta ci chiediamo se è possibile esprimere tramite una formula le coordinate di tutti i suoi punti.
A questo scopo, fissiamo come nel disegno seguente un punto P_0 della retta r e osserviamo che dato un suo qualunque altro punto P, il vettore $\vec{OP}$ si decompone come somma di $\vec{OP_0}$ più un vettore $\vec{OQ}$ che giace sulla retta r' parallela a r e passante per O.

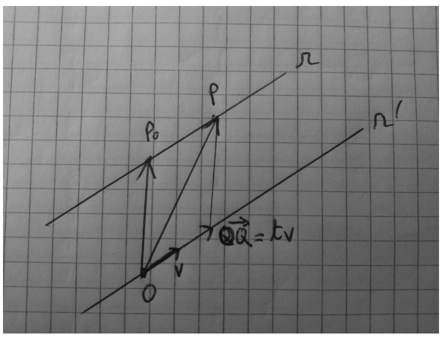


Fissato P_0, quindi, esiste una corrispondenza tra i punti P della retta e i vettori $\vec{OQ}$ che giacciono su r', data proprio da

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{OQ} \tag{1.38}$$

Il vantaggio di passare dai punti della retta r ai vettori $\vec{OQ}$ che giacciono su r' consiste nel fatto che i vettori $\vec{OQ}$ che giacciono su r' formano un sottospazio vettoriale di dimensione 1, in quanto sono tutti multipli tra loro: basta fissarne uno (non nullo), diciamo v, e si avrà sempre $\vec{OQ} = tv$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.
Quindi, la (1.38) può essere riscritta

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv \tag{1.39}$$



Ora, traduciamo tale uguaglianza in coordinate rispetto a un sistema di riferimento: se siamo nello spazio, ricordando le proprietà delle coordinate dei vettori viste nell'Osservazione 1.7, da $\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv$ abbiamo che le coordinate (x, y, z) di $\vec{OP}$ sono uguali alle coordinate, diciamo (x_0, y_0, z_0), di $\vec{OP_0}$ più le coordinate di tv, che a loro volta, sempre per l'Osservazione 1.7, sono uguali al prodotto di t per le coordinate, diciamo (l, m, n), di v, ovvero

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) = (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt) \tag{1.40}$$

La (1.40) ci dice quindi che i punti della retta sono dati esattamente dalle terne (x, y, z) per le quali si ha $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.
È convenzione comune riunire queste tre condizioni nella forma

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{1.41}$$

Dal momento che le (1.41) ci danno esplicitamente le coordinate di tutti i punti della retta r al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si dice allora che tali uguaglianze sono le *equazioni parametriche* di r.

Se invece stiamo lavorando nel piano, si procede nello stesso modo per arrivare allo stesso risultato, ma con una coordinata in meno: da $\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv$ abbiamo che le coordinate (x, y) di $\vec{OP}$ sono uguali alle coordinate, diciamo (x_0, y_0), di $\vec{OP_0}$ più le coordinate di tv, che a loro volta sono uguali al prodotto di t per le coordinate, diciamo (l, m), di v, ovvero

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(l, m) = (x_0 + lt, y_0 + mt) \tag{1.42}$$

La (1.42) ci dice quindi che i punti della retta sono dati esattamente dalle terne (x, y) per le quali si ha $x = x_0 + lt$ e $y = y_0 + mt$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.
Come nel caso dello spazio, è convenzione comune riunire queste condizioni nella forma

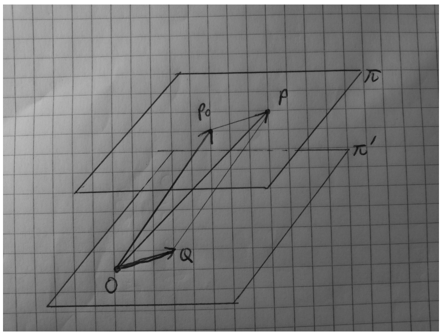
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{1.43}$$

e si parla sempre di *equazioni parametriche* di r.

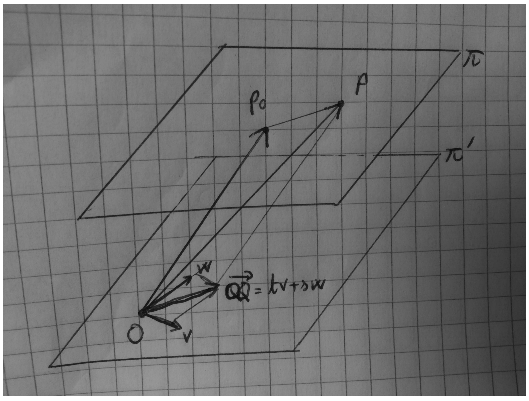
Osservazione 1.34. Si osservi che è del tutto ragionevole che per conoscere la retta abbiamo dovuto scegliere un punto P_0 e un vettore v sulla retta a lei parallela e passante per l'origine: infatti, fissato un punto P_0 esistono infinite rette passanti per P_0, e il vettore v ha il ruolo di fissare la direzione della retta.

Per questo motivo, l'unico vincolo sulla scelta di v è che esso non deve essere nullo, ovvero non devono essere nulle le sue coordinate l, m, n. Questa è l'unica condizione che deve essere soddisfatta affinché una terna di uguaglianze come le (1.41) rappresenti effettivamente una retta r.

Ora vediamo come un procedimento analogo può essere applicato per determinare i punti di un piano π nello spazio.
Infatti, come nel disegno seguente, fissiamo un punto P_0 del piano π e osserviamo che per ogni $P \in \pi$, il vettore $\vec{OP}$ si decompone come somma $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{OQ}$ di $\vec{OP_0}$ più un vettore $\vec{OQ}$ che giace sul piano π' parallelo a π e passante per O.



Esattamente come nel caso della retta, il vantaggio di ricondurre la descrizione dei punti P del piano π ai vettori $\vec{OQ}$ che giacciono su π' consiste nel fatto che tali vettori formano un sottospazio vettoriale e più precisamente possono essere tutti ottenuti come combinazione di due vettori non allineati v e w fissati, ovvero $\vec{OQ} = tv + sw$, per opportuni $t, s \in \mathbb{R}$



Quindi, riassumendo, per tutti i punti P sul piano π vale la relazione

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv + sw \tag{1.44}$$

Ora, come fatto sopra per la retta, traduciamo tale uguaglianza in coordinate rispetto al sistema di riferimento fissato: usando sempre le proprietà delle coordinate viste nell'Osservazione 1.7, da $\vec{OP} = \vec{OP_0} + tv + sw$ abbiamo che le coordinate (x, y, z) di $\vec{OP}$ sono uguali alle coordinate, diciamo (x_0, y_0, z_0), di $\vec{OP_0}$ più le coordinate di tv, (che sono uguali a t per le coordinate, diciamo (l, m, n), di v), più le coordinate di sw (chesono uguali a s per le coordinate, diciamo (l', m', n'), di w) ovvero

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)+t(l, m, n)+s(l', m', n') = (x_0+lt+l's, y_0+mt+m's, z_0+nt+n's) \tag{1.45}$$

La (1.45) ci dice quindi che i punti del piano sono dati esattamente dalle terne (x, y, z) per le quali si ha $x = x_0+lt+l's$, $y = y_0+mt+m's$, $z = z_0+nt+n's$ per certi $t, s \in \mathbb{R}$.
È convenzione comune riunire queste tre condizioni nella forma

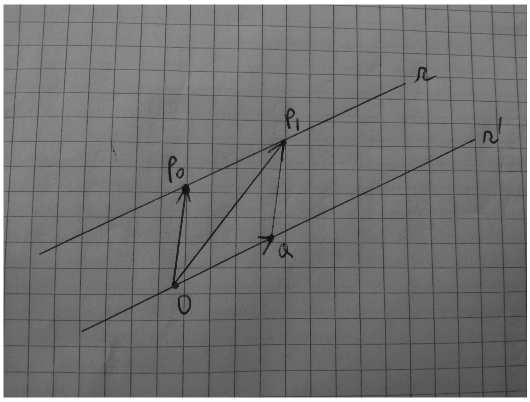
$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l's \\ y = y_0 + mt + m's \\ z = z_0 + nt + n's \end{cases} \tag{1.46}$$

Dal momento che le (1.46) ci danno esplicitamente le coordinate di tutti i punti del piano π al variare dei parametri $t, s \in \mathbb{R}$, si dice allora che tali uguaglianze sono le *equazioni parametriche* di π.

Osservazione 1.35. Come una retta è determinata da un suo punto e da un vettore che ne determina la direzione, così un piano è determinato da un punto e da due vettori v e w che, determinando il piano parallelo al piano dato e passante per l'origine determinano la cosiddetta *giacitura* (ovvero come il piano giace, cioè come è orientato o disposto, nello spazio: non avrebbe senso parlare di direzione del piano perché questo si sviluppa in due dimensioni e non in una sola). Poiché i vettori v e w devono generare il piano per O, l'unico vincolo sulla scelta di tali vettori è che essi non devono essere allineati, il che equivale a dire che le terne (l, m, n) e (l', m', n') non devono essere proporzionali: questa è l'unica condizione che deve essere soddisfatta affinché una terna di uguaglianze come le (1.46) rappresenti effettivamente un piano.

Ora, la geometria euclidea classica ci dice che dati due punti distinti P_0 e P_1 nel piano o nello spazio, esiste un'unica retta r che li contiene. Ci proponiamo di determinare questa retta a partire dalle coordinate dei due punti, che supponiamo note.

Supponiamo che sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$. Per determinare le equazioni parametriche della retta, come sappiamo, ci servono le coordinate (l, m, n) di un vettore non nullo che giaccia sulla retta r' parallela a r e passante per l'origine O del sistema di riferimento. A questo scopo, tracciamo la retta r' e, come nel disegno seguente, tracciamo partendo da P_1 il segmento P_1Q parallelo a OP_0 :



Chiaramente, possiamo usare il vettore $\vec{OQ}$ come generatore della giacitura: ma essendo il quadrilatero OP_0P_1Q un parallelogramma, per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $\vec{OQ} + \vec{OP_0} = \vec{OP_1}$, da cui $\vec{OQ} = \vec{OP_1} - \vec{OP_0}$.
Le coordinate (l, m, n) di $\vec{OQ}$ rispetto alla base B che abbiamo usato per fissare il sistema di riferimento saranno quindi, usando sempre le proprietà delle coordinate rispetto alla somma di vettori, uguali alle coordinate (x_1, y_1, z_1) di $\vec{OP_1}$ meno le coordinate (x_0, y_0, z_0) di $\vec{OP_0}$, cioè

$$(l, m, n) = (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Sostituendo nell'espressione generale (1.41) delle equazioni parametriche di una retta si trova allora

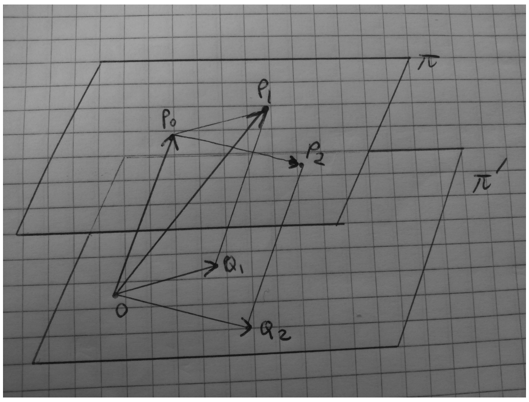
$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \tag{1.47}$$

che sono quindi le equazioni della retta nello spazio che passa per P_0 e P_1.
Nel piano, si ha lo stesso risultato ma con una coordinata in meno, ovvero

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \tag{1.48}$$

Si noti che se i punti non fossero distinti il vettore $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, che si ottiene sottraendo le loro coordinate, sarebbe nullo e non potrebbe servire da vettore direzione della retta.

Analogamente, la geometria euclidea classica ci dice che dati tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati (ovvero che non appartengono alla stessa retta), allora esiste un unico piano π che li contiene. Ci proponiamo di determinare questo piano a partire dalle coordinate dei tre punti.
Supponiamo che sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$.
Per determinare le equazioni parametriche del piano, come sappiamo, ci servono le coordinate (l, m, n), (l', m', n') di due vettori non proporzionali che giacciano sul piano π' parallelo a π e passante per l'origine O del sistema di riferimento. A questo scopo, disegniamo il piano π' e, analogamente a quanto fatto nel caso della retta, consideriamo i parallelogrammi OP_0P1Q_1 e $OP_0P_2Q_2$



I due vettori $\vec{OQ}_1$ e $\vec{OQ}_2$, rispettivamente paralleli ai segmenti P_0P_1 e P_0P_2, giacciono sul piano π' e, per il fatto che i tre punti P_0, P_1, P_2 sono non allineati, sono non proporzionali, quindi possiamo usarli come generatori della giacitura.
Per determinare le coordinate di tali vettori, osserviamo che per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $\vec{OQ}_1 + \vec{OP}_0 = \vec{OP}_1$ e $\vec{OQ}_2 + \vec{OP}_0 = \vec{OP}_2$, da cui $\vec{OQ}_1 = \vec{OP}_1 - \vec{OP}_0$ e $\vec{OQ}_2 = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_0$.
Allora, le coordinate (l, m, n) e (l', m', n') di $\vec{OQ}_1$ e $\vec{OQ}_2$ rispettivamente saranno quindi, sempre usando le proprietà delle coordinate già citate sopra,

$$(l, m, n) = (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

$$(l', m', n') = (x_2, y_2, z_2) - (x_0, y_0, z_0) = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0).$$

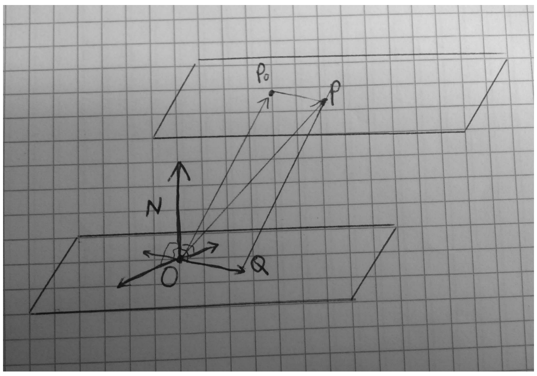
Sostituendo nell'espressione generale (1.46) delle equazioni parametriche di un piano si trova allora

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)s \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)s \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)s \end{cases} \tag{1.49}$$

che sono quindi le equazioni del piano che passa per P_0, P_1 e P_2.

Vediamo ora un modo alternativo per descrivere rette e piani, quello dato dalle cosiddette *equazioni cartesiane*.

Iniziamo dai piani: come visto nel disegno a pagina 54, fissato un punto P_0 del piano, per ogni altro suo punto P si ha che il vettore $\vec{OP}$ si decompone come somma $\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{OQ}$, dove $\vec{OQ}$ è un vettore che sta sul piano parallelo al piano dato e passante per O.
Avevamo poi osservato che ogni tale $\vec{OQ}$ si scrive come somma $tv + sv'$ di due vettori v e v' non allineati, ottenendo così le parametriche; l'osservazione alternativa che facciamo ora invece, è che tutti i vettori $\vec{OQ}$ sono perpendicolari a un qualunque vettore N perpendicolare al piano:



Quindi i punti P del piano sono caratterizzati dalla condizione che $\vec{OP} - \vec{OP_0} = \vec{OQ}$ è perpendicolare a N. Ora, esprimiamo tale condizione in coordinate: se denotiamo con (x, y, z) le coordinate di P (ovvero le coordinate del vettore $\vec{OP}$) e con (x_0, y_0, z_0) le coordinate di P_0 (ovvero le coordinate del vettore $\vec{OP_0}$), le coordinate del vettore $\vec{OP} - \vec{OP_0}$ sono date, come sappiamo dalle proprietà delle coordinate, dalla terna $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Dette (a, b, c) le coordinate del vettore N, sappiamo che, *se la base fissata per il nostro sistema di riferimento è ortonormale*, allora la condizione che $\vec{OP} - \vec{OP_0}$ sia perpendicolare a N equivale in base alla (1.18) a

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Questa quindi è la condizione che devono soddisfare le coordinate (x, y, z) di un punto P perché il punto appartenga al piano.
Svolgendo i conti otteniamo

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

ovvero, portando a secondo membro tutti i termini che non contengono x, y, z,

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Denotando $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$, otteniamo infine

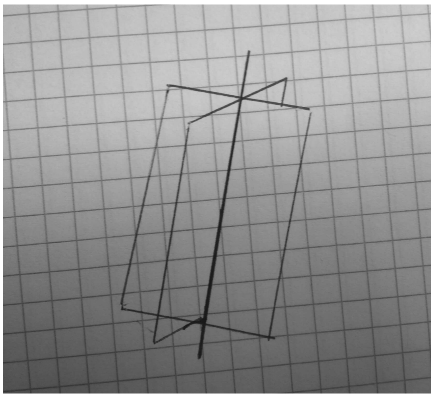
$$ax + by + cz = d \tag{1.50}$$

In conclusione, i punti di un piano dato sono caratterizzati dal fatto che le loro coordinate (x, y, z) soddisfano un'equazione di primo grado in tre incognite; se la base del nostro sistema di riferimento è ortonormale, i coefficienti di x, y, z nell'equazione, ovvero a, b, c, rappresentano le coordinate di un vettore perpendicolare al piano (detto anche una *normale al piano*); il termine noto d dell'equazione contiene invece l'informazione relativa a un punto per cui passa il piano, come abbiamo visto ricavando l'equazione.
Poichè piani con la stessa normale risultano paralleli, deduciamo che fissando a, b, c e facendo variare solo d "muoviamo" il piano parallelamente a se stesso.

Esempio 1.36. L'equazione $x + 2y + 3z = 6$ rappresenta un piano nello spazio, la cui giacitura è normale al vettore di coordinate $(1, 2, 3)$; un esempio di punto che appartiene al piano è $P \equiv (1, 1, 1)$, in quanto sostituendo tali coordinate al posto di x, y, z nell'equazione si ottiene $1 + 2 + 3 = 6$ che è verificata, mentre ad esempio il punto $P \equiv (1, 2, 0)$ non appartiene al piano in quanto $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 6$ non è verificata.

L'equazione cartesiana del piano rappresenta un modo *implicito* di dare i punti del piano, diversamente dalle equazioni parametriche che ci danno i punti *esplicitamente*: infatti, mentre nel caso delle parametriche i punti del piano sono dati semplicemente scegliendo valori reali dei parametri t e s, nel caso nelle cartesiane per ottenere i punti del piano bisogna trovare le soluzioni dell'equazione: tale equazione rappresenta un vincolo che imponiamo ai punti dello spazio per appartenere al piano.

Nel caso delle rette, possiamo rappresentarle in maniera implicita come segue: come si vede nel disegno

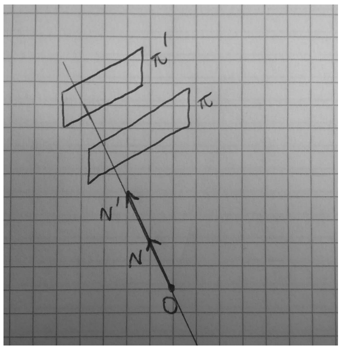


qualunque retta può essere pensata come intersezione di due piani (esistono infiniti piani che contengono una retta data, ma basta prenderne due per ottenere la retta come intersezione).
Supponendo che il primo piano sia descritto dall'equazione cartesiana $ax + by + cz = d$ (ovvero i punti del primo piano sono, in coordinate, le soluzioni di questa equazione) e il secondo piano dall'equazione $a'x + b'y + c'z = d'$ (ovvero i punti del secondo piano sono, in coordinate, le soluzioni di quest'altra equazione) allora i punti della retta, essendo i punti comuni ai due piani, sono dati dalle soluzioni comuni a queste due equazioni, ovvero dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \tag{1.51}$$

Abbiamo quindi dimostrato che, oltre che esplicitamente attraverso equazioni parametriche, una retta nello spazio può essere descritta implicitamente mediante un sistema di due equazioni di primo grado in tre incognite.

Osservazione 1.37. Per rappresentare una retta come intersezione di due piani, è ovviamente necessario che i due piani non siano paralleli (l'intersezione sarebbe l'insieme vuoto) o addirittura coincidenti: ma questo accade solo se le normali dei due piani sono uguali o al più una è mutiplo dell'altra (cambierebbe lunghezza o verso ma la direzione rimarrebbe la stessa):



Ad esempio, il sistema di equazioni seguente $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$, pur essendo un sistema di due equazioni di primo grado in tre incognite, non rappresenta una retta: la normale al piano rappresentato dalla prima equazione $x - y + 2z = 3$ è $N \equiv (1, -1, 2)$, la normale al piano rappresentato dalla seconda equazione $2x - 2y + 4z = 2$ è $N' \equiv (2, -2, 4)$: essendo le coordinate di N' date dalle coordinate di N moltiplicate per 2, deduciamo che $N' = 2N$ e quindi i due piani, avendo normali con la stessa direzione, sono paralleli e non si incontrano lungo una retta.
Invece, ad esempio, il sistema $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ rappresenta una retta nello spazio; il punto $(1, 1, 1)$ appartiene alla retta in quanto le sue coordinate soddisfano entrambe le equazioni, il punto $(2, 0, 1)$ non appartiene alla retta in quanto benché le sue coordinate soddisfino la prima equazione non soddisfano la seconda.

Quanto visto sino ad ora suggerisce che per risolvere problemi geometrici riguardanti rette e piani è necessario saper risolvere i sistemi di equazioni di primo grado: infatti, non solo nelle espressioni delle parametriche i parametri t ed s compaiono con grado 1, e le cartesiane sono sistemi di equazioni di primo grado, ma se volessimo ad esempio capire se un piano e una retta dati rispettivamente da equazioni cartesiane $ax+by+cz = d$ e $\begin{cases} a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ si intersecano, e trovare gli eventuali punti di intersezione, dovremmo risolvere il sistema $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ che si ottiene mettendo insieme tutte le equazioni (in quanto i punti comuni al piano e alla retta sono i punti che soddisfano sia l'equazione del piano che le due equazioni della retta).
Anche in parametriche, il problema di indivuduare i punti comuni si traduce in un sistema di equazioni di primo grado: se ad esempio ho due piani, dati

da parametriche $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + t - s \\ z = t + 2s \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -2 + t + 3s \\ y = 1 - t - s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$, per trovare i punti comuni dovrei scoprire se esistono valori di t ed s nelle prime e valori t' ed s' (eventualmente diversi dai t e s scelti nelle prime) nelle seconde che ci danno gli stessi valori di x, y, z, ovvero impostare le uguaglianze

$$\begin{cases} 1 + t + s = -2 + t' + 3s' \\ 2 + t - s = 1 - t' - s' \\ t + 2s = 1 + t' + s' \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t + s - t' - 3s' = -3 \\ t - s + t' + s' = -1 \\ t + 2s - t' - s' = 1 \end{cases}$$

che è un sistema di tre equazioni di primo grado in quattro incognite.
Emerge quindi l'esigenza di saper risolvere i sistemi di primo grado con qualunque numero di equazioni e qualunque numero di incognite, che sarà lo scopo del prossimo capitolo.