Gli argomenti di questo capitolo sono quasi tutti contenuti nel file Matrici.pdf

Da questo capitolo fare:
Paragrafo 3.3 (formula di Laplace)
Teorema 3.6
Osservazione 3.7
da Teorema 3.9 sino alla fine del capitolo

Chapter 3

Il determinante

In questo capitolo introdurremo uno strumento alternativo alla riduzione a gradini per determinare se le righe (o le colonne) di una matrice siano dipendenti. Per poterne dare la definizione rigorosa, dobbiamo prima fare alcuni richiami sulle permutazioni.

3.1 Richiami sulle permutazioni

Dato l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ dei numeri naturali compresi tra 1 e n, per un certo n, una funzione da $\{1, 2, \ldots, n\}$ in se stesso associa a ogni elemento di $\{1, 2, \ldots, n\}$ un'immagine, scelta sempre all'interno di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se facciamo in modo che le immagini siano tutte diverse senza ripetizioni[1], queste ci daranno ancora tutti gli elementi $1, 2, \ldots, n$ semplicemente disposti in un altro ordine, ovvero permutati. Si parla allora di *permutazione di n elementi*. Ad esempio, le seguenti rappresentano permutazioni di 4 elementi:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 2 \\ 4 & \mapsto & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 4 \\ 3 & \mapsto & 2 \\ 4 & \mapsto & 1 \end{array}$$

L'insieme delle permutazioni di n elementi si denota S_n. Per ogni n, tale insieme contiene esattamente $n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ (cioè n *fattoriale*) permutazioni: ad esempio, per $n = 2$ abbiamo $2! = 2 \cdot 1 = 2$ permutazioni possibili, ovvero

[1] Si dice che la funzione è *iniettiva*: una funzione iniettiva da un insieme finito in se stesso è automaticamente anche *suriettiva*, e quindi *biiettiva*. Richiameremo queste nozioni nel prossimo capitolo.

$$\begin{array}{rcl rcl} 1 & \mapsto & 1 & 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 2 & 2 & \mapsto & 1 \end{array}$$

(tra le permutazioni vi è sempre anche quella che associa a ogni elemento se stesso, detta permutazione identica[2]).

Per $n = 3$ abbiamo invece $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{ccc ccc ccc ccc ccc ccc} 1 & \mapsto & 1 & 1 & \mapsto & 2 & 1 & \mapsto & 1 & 1 & \mapsto & 3 & 1 & \mapsto & 2 & 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 2 & 2 & \mapsto & 1 & 2 & \mapsto & 3 & 2 & \mapsto & 2 & 2 & \mapsto & 3 & 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 3 & 3 & \mapsto & 3 & 3 & \mapsto & 2 & 3 & \mapsto & 1 & 3 & \mapsto & 1 & 3 & \mapsto & 2 \\ & p_1 & & & p_2 & & & p_3 & & & p_4 & & & p_5 & & & p_6 & \end{array}$$

Si noti che p_2, p_3 e p_4 scambiano tra loro due elementi lasciando fisso il terzo (p_2 scambia tra loro 1 e 2, p_3 scambia tra loro 2 e 3, p_4 scambia tra loro 1 e 3): in generale, una permutazione di questo tipo, che scambia tra loro due elementi lasciando fissi tutti gli altri si dice *trasposizione*. Ad esempio, è una trasposizione anche la prima permutazione di 4 elementi presentata all'inizio del paragrafo (scambia tra loro 2 e 3 lasciando fissi 1 e 4), mentre la seconda non lo è.

Benché non tutte le permutazioni siano trasposizioni, si può dimostrare che qualunque permutazione può essere ottenuta come composizione di trasposizioni, ovvero può essere realizzata eseguendo una sequenza di trasposizioni. Ad esempio, la permutazione p_5 di sopra, che non è una trasposizione, può tuttavia essere ottenuta scambiando prima 1 e 2, e poi 1 e 3:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 \end{array}$$

ovvero può essere ottenuta componendo 2 trasposizioni.

In generale, se il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data p è pari, si dice che p è una *permutazione pari*; se invece il numero di trasposizioni che servono per ottenere p è dispari, si dice che p è una *permutazione dispari*. Ad esempio, p_5 è una permutazione pari, in quanto l'abbiamo ottenuta componendo 2 trasposizioni; è facile vedere che anche p_6 è una permutazione pari, in quanto può essere ottenuta componendo due trasposizioni:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 \end{array}$$

[2]Come funzione, si tratta della cosiddetta identità o funzione identica

Chiaramente, se una permutazione è già essa una trasposizione, allora essa è dispari (1 è un numero dispari).
Si noti che possono esserci più modi diversi di decomporre una permutazione come composizione di trasposizioni, ad esempio, la permutazione identica può essere vista o come risultato di 0 trasposizioni, oppure come risultato di 2 trasposizioni, ad esempio

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 \end{array}$$

Tuttavia, si può dimostrare che il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data è o sempre pari o sempre dispari (nell'esempio, 0 o 2, comunque pari).

Si può allora definire il *segno* $s(p)$ *di una permutazione* p come $s(p) = +1$ se p è una permutazione pari e $s(p) = -1$ se p è una permutazione dispari.

Siamo ora pronti a definire il determinante.

3.2 La definizione di determinante

Sia A una matrice che ha n righe e n colonne, per qualche $n > 0$: tali matrici si dicono *quadrate* e il numero n comune delle righe e delle colonne si dice *l'ordine della matrice.*

Il determinante associa a ogni matrice A quadrata di ordine n a entrate in un campo $\mathbb{K}$ un elemento $\det(A) \in \mathbb{K}$, funzione delle sue entrate, per il quale vedremo che vale l'importante proprietà che $\det(A) = 0$ se e solo se la matrice ha rango minore di n, ovvero se e solo se le righe (o le colonne) della matrice sono dipendenti.
La definizione è la seguente:

Definizione 3.1. Sia A una matrice quadrata di ordine n con entrate a_{ij}. Allora

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} s(p)\ a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} \tag{3.1}$$

In altre parole, il determinante di una matrice quadrata di ordine n è dato da una sommatoria che ha un addendo per ogni permutazione $p \in S_n$: ognuno di questi addendi è un prodotto di entrate di A del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$, con davanti un segno $+$ o $-$ a seconda che la permutazione p sia pari o dispari. Si noti che l'espressione $a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$ è il prodotto di n entrate scelte nella matrice, una per ogni riga, con gli indici di colonna dati da

$p(1), p(2), \ldots, p(n)$: poiché una permutazione scambia gli indici $1, 2, \ldots, n$ senza ripetizioni, stiamo praticamente scegliendo un'entrata da ogni riga in modo però che le entrate scelte stiano anche su colonne diverse.

Per chiarire e illustrare la definizione precedente, consideriamo in particolare i casi $n = 2$ e $n = 3$.

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine $n = 2$. Come abbiamo visto sopra ci sono solo due permutazioni dell'insieme $\{1, 2\}$ (l'identità e la trasposizione che scambia 1 con 2) quindi nella sommatoria (3.1) avremo solo due addendi, del tipo $s(p)a_{1p(1)}a_{2p(2)}$: se p è l'identità, che come abbiamo osservato sopra è un permutazione pari e quindi $s(p) = +1$, l'addendo corrispondente sarà $+a_{11}a_{22}$; se p è la trasposizione che scambia 1 con 2, che è una permutazione dispari, si ha $s(p) = -1$ e l'addendo corrispondente sarà $-a_{12}a_{21}$. Il determinante di una matrice quadrata A di ordine 2 risulta quindi essere

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3.2}$$

Nel caso di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ quadrata di ordine $n = 3$, la sommatoria (3.1) avrà 6 addendi, tanti quante sono le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$, e per ognuna di queste permutazioni p l'addendo corrispondente sarà del tipo $s(p)a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$. Più precisamente, avremo

l'addendo $+a_{11}a_{22}a_{33}$ corripondente alla permutazione $p(1) = 1,\ p(2) = 2,\ p(3) = 3$ (cioè la permutazione identica, che è una permutazione pari)

l'addendo $-a_{11}a_{23}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1,\ p(2) = 3,\ p(3) = 2$ (che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari)

l'addendo $+a_{12}a_{23}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2,\ p(2) = 3,\ p(3) = 1$ (che si può scrivere come composizione di due trasposizioni ed è quindi una permutazione pari)

l'addendo $-a_{12}a_{21}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2,\ p(2) = 1,\ p(3) = 3$ (che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari)

l'addendo $+a_{13}a_{21}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3,\ p(2) = 1,\ p(3) = 2$ (che si può scrivere come composizione di due trasposizioni ed è quindi una permutazione pari) l'addendo $-a_{13}a_{22}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3,\ p(2) = 2,\ p(3) = 1$ (che è una trasposizione e quindi una permutazione dispari)

e quindi si avrà, per una matrice A di ordine 3,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{3.3}$$

Ora, vedremo nel Paragrafo 3.4 la dimostrazione del fatto che il determinante di una matrice quadrata di ordine n si annulla se e solo se la matrice ha le righe dipendenti: questo fatto può essere mostrato già ora per i casi $n = 2$ e $n = 3$, usando le formule esplicite (3.2) e (3.3).

Nel caso di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ di ordine 2, essendoci solo due righe, dire che esse sono dipendenti significa che esse sono proporzionali, ovvero diciamo che esiste un $c \in \mathbb{K}$ tale che $(a_{11}, a_{12}) = c(a_{21}, a_{22})$, cioè

$$a_{11} = ca_{21}, \quad a_{12} = ca_{22} \tag{3.4}$$

Ma allora, moltiplicando (a entrambi i membri) la prima uguaglianza per a_{22} e la seconda per a_{21} si ha $a_{11}a_{22} = ca_{21}a_{22}$ e $a_{12}a_{21} = ca_{22}a_{21}$, da cui vediamo che $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$: quindi $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, ovvero $\det(A) = 0$. Quindi se una matrice di ordine 2 ha le righe proporzionali, il suo determinante è zero.

Viceversa, supponiamo che il determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sia zero, ovvero

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}. \tag{3.5}$$

Supponendo per il momento che le entrate a_{21}, a_{22} della seconda riga non siano nulle, dividendo entrambi i membri della (3.5) per a_{21} e a_{22} otteniamo

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{3.6}$$

cioè si ha $\frac{a_{11}}{a_{21}} = c$ e $\frac{a_{12}}{a_{22}} = c$ per qualche $c \in \mathbb{K}$, da cui ritroviamo le uguaglianze (3.4), e quindi le righe sono proporzionali.

Si noti che la (3.5) ci dice che le righe sono dipendenti anche senza l'ipotesi, che era necessaria per poter scrivere la (3.6), che a_{21} e a_{22} fossero entrambi diversi da zero: infatti, se ad esempio $a_{21} = 0$ allora la (3.5) diventa $a_{11}a_{22} = 0$, che equivale a dire che o $a_{11} = 0$ o $a_{22} = 0$: ma nel primo caso la matrice è della forma $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, nel secondo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e in entrambi i casi otteniamo sempre che le righe sono proporzionali.

Nel caso di matrici di ordine 3, dimostrare che il determinante si annulla se e solo se le righe sono dipendenti non è difficile se ci aiutiamo con un'interpretazione geometrica: infatti, prendiamo l'espressione (3.3) del determinante di una tale matrice e riscriviamola nel modo seguente:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \qquad (3.7)$$

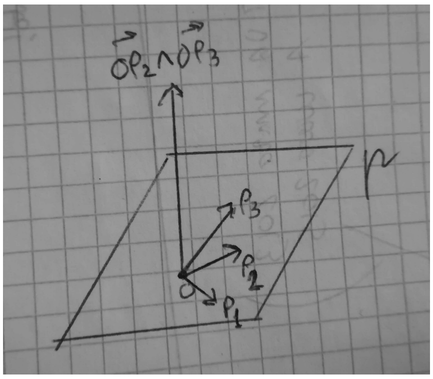
Ora, le tre quantità dentro le parentesi tonde non sono altro che le componenti del prodotto vettoriale (si ricordi la Definizione 1.22) dei due vettori di $\mathbb{R}^3$ dati dalla seconda e dalla terza riga della matrice:

$$R_2 \wedge R_3 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \wedge (a_{31}, a_{32}, a_{33}) =$$
$$(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Quindi la (3.7), dal momento che moltiplica le componenti di $R_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ con le rispettive componenti di $R_2 \wedge R_3$ (la prima con la prima, la seconda con la seconda, la terza con la terza) e somma, non è nient'altro che quello che abbiamo chiamato prodotto scalare (si veda la (1.19)) tra R_1 e $R_2 \wedge R_3$. Quindi, dire che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla equivale a dire che le sue tre righe R_1, R_2, R_3 verificano l'uguaglianza

$$R_1 \cdot (R_2 \wedge R_3) = 0 \qquad (3.8)$$

Ora, se fissiamo nello spazio V_O^3 dei vettori applicati nello spazio tridimensionale una base ortonormale, le terne R_1, R_2, R_3 rappresenteranno le coordinate di tre vettori applicati $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ rispettivamente, e la (3.8) ci sta allora dicendo che il vettore $\vec{OP_1}$ è perpendicolare al vettore $\vec{OP_2} \wedge \vec{OP_3}$ (infatti, abbiamo dimostrato che due vettori dello spazio sono perpendicolari solo se il prodotto scalare tra le terne delle loro coordinate è zero, si veda la (1.18)). Ma, essendo a sua volta $\vec{OP_2} \wedge \vec{OP_3}$, per le proprietà del prodotto vettoriale, perpendicolare al piano p su cui stanno $\vec{OP_2}$ e $\vec{OP_3}$, dire che $\vec{OP_1}$ è perpendicolare $\vec{OP_2} \wedge \vec{OP_3}$ significa dire che anche $\vec{OP_1}$ deve stare sul piano p:



Quindi i tre vettori, stando sullo stesso piano, sono tra loro dipendenti, e concludiamo che sono dipendenti anche le terne R_1, R_2, R_3 delle loro coordinate[3]. Questo mostra come volevamo che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla se e solo se le sue righe R_1, R_2, R_3 sono dipendenti.

Nel paragrafo sulle proprietà del determinante, dimostreremo in modo puramente algebrico che questo fatto è vero per matrici di qualunque ordine. Prima di fare ciò, vediamo nel prossimo paragrafo un modo di calcolare il determinante alternativo alla definizione, il cui utilizzo diretto richiederebbe di scrivere una sommatoria che per una matrice di ordine n ha $n!$ addendi, tanti quanti le permutazioni di n elementi (si pensi che già per $n = 4$ abbiamo $4! = 24$ addendi).

DA FARE

3.3 La formula di Laplace

Allo scopo di calcolare il determinante, useremo la cosiddetta *formula di Laplace*, per scrivere la quale abbiamo prima bisogno di dare la seguente

Definizione 3.2. Sia A una matrice quadrata di ordine n: per ogni entrata a_{ij} di A, definiamo il *cofattore di* a_{ij}, denotato C_{ij}, come il determinante della matrice di ordine $n-1$ che si ottiene da A cancellando la riga i e la colonna j, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$

Vediamo subito un esempio: consideriamo la matrice di ordine 3 seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

[3]Ricordiamo che dei vettori in uno spazio vettoriale sono dipendenti se e solo se lo sono le n-uple delle loro coordinate rispetto a una base scelta.

L'entrata a_{11} è uguale a 1: il suo cofattore C_{11} è, in base alla definizione 3.2, il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna (ovvero la riga e la colonna dell'entrata a_{11} presa in considerazione) moltiplicato per $(-1)^{1+1}$:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = (-1)^2(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) = +(45 - 48) = -3$$

Invece, se per esempio prendiamo l'entrata $a_{23} = 6$, il suo cofattore C_{23} è il determinante della matrice di ordine 2 che si ottiene cancellando la seconda riga e la terza colonna (ovvero la riga e la colonna dell'entrata a_{23}) moltiplicato per $(-1)^{2+3}$:

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = (-1)^5(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = -(8 - 14) = +6$$

Siamo ora pronti a enunciare il seguente risultato, che ci dà una formula per il calcolo del determinante di una matrice:

Proposizione 3.3. Sia A una matrice di ordine n. Data una sua qualunque riga $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ o una sua qualunque colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, si ha

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \tag{3.9}$$

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \tag{3.10}$$

La proposizione, che non dimostriamo, afferma quindi che il determinante di una matrice si può calcolare scegliendo una riga o una colonna, moltiplicando ogni elemento della riga o della colonna per il suo cofattore e sommando il tutto. La (3.9) e la (3.10) si dicono rispettivamente *formula (o sviluppo) di Laplace secondo la i-esima riga* e *formula (o sviluppo) di Laplace secondo la j-esima colonna*.

L'osservazione importante da fare sulla formula di Laplace è che essa esprime il determinante di una matrice di ordine n in funzione dei suoi cofattori, che sono, a parte il fattore $(-1)^{i+j}$, determinanti di matrici di ordine $n-1$: a loro volta, potremo poi calcolare ciascuno di questi cofattori riutilizzando la formula di Laplace, con la quale ci ridurremo a calcolare determinanti di matrici di ordine $n-2$, e così via, fino a che non arriveremo a matrici di ordine 2 per le quali la formula del determinante è particolarmente semplice da ricordare. Vediamo un esempio.

Esempio 3.4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Scegliamo di sviluppare il determinante secondo Laplace rispetto alla terza riga, usando cioè la formula (3.9) nel caso $i = 3$:

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}.$$

Per definizione di cofattori e tenendo conto che $a_{32} = a_{33} = 0$ (e quindi non abbiamo bisogno di calcolare i corrispondenti cofattori) si ha

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Ora, ciascuno dei due determinanti di ordine 3 che compaiono in questa uguaglianza può essere calcolato usando di nuovo la formula data. Ad esempio, se per il primo determinante scegliamo la terza colonna (quindi dobbiamo usare $\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$) tenendo conto che $a_{13} = a_{33} = 0$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

dove il determinante di ordine 2 è stato calcolato usando la formula $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Analogamente, se per l'altro determinante scegliamo la prima riga (quindi dobbiamo usare $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$) tenendo conto che $a_{13} = 0$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Sostituendo questi risultati nella (3.11), si trova allora

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+1}(-1) + 1 \cdot (-1)^{3+4}\, 2 = -3.$$

Nell'enunciato della Proposizione 3.3, è sottointeso il fatto che il risultato dello sviluppo ci darà sempre il determinante di A indipendentemente dalla riga o colonna scelta: questo è molto importante nella pratica in quanto ci consente, come visto anche nell'esempio, di scegliere se possibile righe o colonne in cui alcune entrate siano nulle, così da non dover calcolare i corrispondenti cofattori.

Osservazione 3.5. Notiamo che l'espressione (3.7), che abbiamo usato per mostrare geometricamente che il determinante di una matrice di ordine 3 si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti, non era altro che lo sviluppo di Laplace di tale determinante rispetto alla prima riga: infatti, ricordando la definizione di determinante di una matrice di ordine 2, si trova

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$a_{11}(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

3.4 Proprietà del determinante

In questo paragrafo dimostreremo finalmente che il determinante di una matrice quadrata A si annulla se e solo se le sue righe sono dipendenti. A questo scopo, iniziamo con l'enunciare e dimostrare tre importanti proprietà del determinante:

(1) se A' si ottiene da A moltiplicando una riga di A per $c \in \mathbb{K}$, allora $\det(A') = c\det(A)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la prima riga per $c = 5$, ho $\det(A) = -2$ e $\det(A') = 5 \cdot 4 - 10 \cdot 3 = -10 = 5\det(A)$.

In altre parole, se una riga di una matrice viene moltiplicata per uno scalare c, quando calcoliamo il determinante possiamo "portare fuori" questo scalare.

Proof. In base alla definizione (3.1) di determinante, il determinante della matrice A' in cui abbiamo moltiplicato tutti gli elementi della riga i-esima per c è $\det(A') = \sum s(p)a_{1p(1)} \cdots (ca_{ip(i)}) \cdots a_{np(n)}$: essendo il fattore c comune a tutti gli addendi della sommatoria, possiamo metterlo in evidenza davanti alla somma e scrivere $\det(A') = c\sum s(p)a_{1p(1)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)}$, ovvero $\det(A') = c\det(A)$, come volevamo. $\square$

(2) supponiamo di sommare a una riga R_i di una matrice A una n-upla $v = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})$. Allora, il determinante della nuova matrice A' così ottenuta vale

$$\det(A') = \det(A) + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ v \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

dove stiamo denotando con $\begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ v \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix}$ la matrice ottenuta da A sostituendo v al posto della riga R_i. Possiamo anche scrivere

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ R_i + v \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ R_i \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ v \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Ad esempio, consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e sommiamo alla sua seconda riga $(2, 1)$ la coppia $(1, 3)$, ottenendo $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Allora si ha proprio

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det(A) + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ovvero $-2 = -3 + 1$).

Proof. Se

$$R_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

allora la riga i-esima della matrice A' è

$$R_i + v = \begin{pmatrix} a_{i1} + v_{i1} & a_{i2} + v_{i2} & \dots & a_{in} + v_{in} \end{pmatrix}.$$

In base alla definizione (3.1) di determinante, si ha

$$\det(A') = \sum s(p) a_{1p(1)} \cdots (a_{ip(i)} + v_{ip(i)}) \cdots a_{np(n)} =$$

$$= \sum s(p) a_{1p(1)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} + \sum s(p) a_{1p(1)} \cdots v_{ip(i)} \cdots a_{np(n)}$$

ovvero $\det(A) + \det \begin{pmatrix} R_1 \\ ... \\ v \\ ... \\ R_n \end{pmatrix}$, come volevamo. □

(3) se A' si ottiene da A scambiando tra loro due righe allora $\det(A') = -\det(A)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro la prima e la seconda riga, ho $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ e $\det(A') = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = +2$.

Proof. Sia A' la matrice ottenuta da A scambiando la riga R_i con la riga R_j: quindi per ogni k si ha $a'_{ik} = a_{jk}$ e $a'_{jk} = a_{ik}$, mentre tutte le altre entrate sono uguali a quelle di A.

Quindi, in base alla (3.1), si ha

$$\det(A') = \sum_{p \in S_n} s(p)\ a'_{1p(1)} \cdots a'_{ip(i)} \cdots a'_{jp(j)} \cdots a'_{np(n)} =$$

$$= \sum_{p \in S_n} s(p)\ a_{1p(1)} \cdots a_{jp(i)} \cdots a_{ip(j)} \cdots a_{np(n)}. \tag{3.14}$$

(in pratica, l'unica differenza tra la (3.14) e l'espressione del determinante di A è che in ogni addendo le entrate "centrali" hanno gli indici di riga i e j scambiati tra loro).

Ora, allo scopo di dimostrare il risultato, riscriviamo la (3.14) come segue: consideriamo la trasposizione $\tau \in S_n$ che scambia i con j e lascia invariati tutti gli altri elementi: quindi $j = \tau(i)$, $i = \tau(j)$, e per tutti gli altri indici $k = \tau(k)$.

Allora possiamo scrivere

$$\det(A') = \sum_{p \in S_n} s(p)\ a_{1\ p(\tau(1))} \cdots a_{j\ p(\tau(j))} \cdots a_{i\ p(\tau(i))} \cdots a_{n\ p(\tau(n))}. \tag{3.15}$$

Ora, per un qualunque indice k, si ha che $p(\tau(k))$ è il valore associato a k dalla permutazione $p\tau$ che si ottiene componendo p con τ (ovvero applicando, da destra, prima τ e poi p). Tale permutazione è tale che $s(p\tau) = -s(p)$. Questo in quanto se p è pari allora $p\tau$ è dispari, e viceversa: infatti, se p è pari vuol dire che si scrive come composizione di un numero pari di trasposizioni, e allora $p\tau$, sarà composta da un numero dispari di trasposizioni (una in più di p), e analogamente se p è dispari vuol dire che si scrive come composizione di un numero dispari di trasposizioni, e allora $p\tau$, sarà composta da un numero pari di trasposizioni. Riassumendo, la (3.15), scambiando anche di ordine i due fattori centrali $a_{j\ p\tau(j)}$ e $a_{i\ p\tau(i)}$ in ogni addendo (il prodotto gode della proprietà commutativa) può essere scritta nel modo seguente

$$\det(A') = -\sum_{p \in S_n} s(p\tau)\ a_{1\ p\tau(1)} \cdots a_{i\ p\tau(i)} \cdots a_{j\ p\tau(j)} \cdots a_{n\ p\tau(n)} \tag{3.16}$$

Ora, quest'ultima espressione, con il segno meno davanti, è uguale a quella del determinante di A a parte che in essa compare $p\tau$ invece che p. Ma in realtà questo non cambia nulla, in quanto quando facciamo variare p tra tutte le permutazioni $p_1, p_2, \ldots, p_{n!}$ di n elementi, $p_1\tau, p_2\tau, \ldots, p_{n!}\tau$ sono ancora *tutte* le permutazioni: per non esserlo, dovrebbe infatti succedere che $p_i\tau = p_j\tau$ per $p_i \neq p_j$, ma questo è impossibile in quanto se $p_i\tau = p_j\tau$ allora $p_i\tau\tau = p_j\tau\tau$, ovvero, essendo $\tau\tau = id$, $p_i = p_j$.

Quindi, a parte il segno, la (3.16) contiene esattamente un addendo per ogni permutazione, e otteniamo il risultato voluto.

$\square$

La proprietà (3) ha l'importante conseguenza che *se una matrice ha due righe uguali allora il suo determinante è nullo.*
Infatti, in base alla (3) se A' è ottenuta da A scambiando tra loro due righe allora $\det(A') = -\det(A)$, ma se le righe scambiate sono proprio le due righe uguali allora $A' = A$, da cui concludiamo $\det(A) = -\det(A)$, ovvero $\det(A) = 0$.

Combinando questo fatto con le proprietà (2) e (1) possiamo capire come si comporta il determinante quando eseguiamo operazioni elementari del terzo tipo: infatti, supponiamo che A' sia ottenuta da A sommanda alla sua i-esima riga R_i la j-esima riga R_j moltiplicata per c, ovvero $A' = \begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ R_i + cR_j \\ \ldots \\ R_j \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix}$.

Ma allora, per la proprietà (2) e la proprietà (1) ho $\det(A') =$

$$= \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ R_i + cR_j \\ \ldots \\ R_j \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ R_i \\ \ldots \\ R_j \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ cR_j \\ \ldots \\ R_j \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ R_i \\ \ldots \\ R_j \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} R_1 \\ \ldots \\ R_j \\ \ldots \\ R_j \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Ma mentre il primo addendo dopo l'ultima uguaglianza è il determinante della matrice A, il secondo addendo è nullo, in quanto determinante di una matrice con le righe uguali (compare due volte R_j).
Quindi la (3.17) si legge

$$\det(A') = \det(A) + 0 = \det(A).$$

Concludiamo che *quando eseguiamo un'operazione elementare del terzo tipo sulle righe di una matrice, il determinante non cambia.*

Ora siamo finalmente pronti a dimostrare il

DA FARE

Teorema 3.6. Una matrice A quadrata di ordine n ha rango n (ovvero ha le righe indipendenti) se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Applicazione del teorema: per sapere se n vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti oppure dipendenti, si dispongono le loro coordinate in una matrice e si calcola il determinante.
Se det $\neq$ 0, allora i vettori sono lin. indipendenti.
Se det = 0, allora i vettori sono lin. dipendenti.

Proof. Supponiamo che A abbia rango massimo n. Allora, come sappiamo, nella matrice A' ottenuta da A in seguito alla riduzione a gradini non compaiono righe nulle.
Poiché A' si ottiene da A mediante operazioni elementari, e come abbiamo visto sopra le operazioni elementari o non modificano il determinante (terzo tipo) o lo cambiano di segno (primo tipo) o lo moltiplicano per un coefficiente non nullo (secondo tipo), si avrà $\det(A') = \pm c_1 \cdots c_m \det(A)$, con $c_1, \ldots, c_m \neq 0$, e per dimostrare che $\det(A) \neq 0$ ci basta dimostrare che $\det(A') \neq 0$.
Poiché stiamo dicendo che A' è una matrice quadrata a gradini senza righe nulle, A' è della forma

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n-1} & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n-1} & a'_{2n} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

triangolare superiore
con elementi sulla diagonale
tutti diversi da zero

con $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{n-1n-1}, a'_{nn}$ tutti diversi da zero. Calcoliamo il determinante di A' sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima colonna: essendo a'_{11} l'unico elemento non nullo, si avrà

il det di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale

$$\det(A') = a'_{11}(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a'_{22} & \ldots & a'_{2n-1} & a'_{2n} \\ 0 & \vdots & & \\ 0 & \ldots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & \ldots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix} =$$

Se sviluppiamo ora il cofattore di nuovo secondo Laplace rispetto alla sua prima colonna, che ha come unico elemento non nullo a'_{22}, otteniamo

$$\det(A') = a'_{11}a'_{22} \det \begin{pmatrix} a'_{33} & \ldots & a'_{3n-1} & a'_{3n} \\ & \vdots & & \\ 0 & \ldots & a'_{n-1n-1} & a'_{n-1n} \\ 0 & \ldots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

e continuando a sviluppare sempre rispetto alla prima colonna otteniamo $\det(A') = a'_{11}a'_{22} \cdots a'_{nn}$. Essendo come abbiamo detto gli elementi $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn}$ tutti non nulli, si ha, come volevamo, $\det(A') \neq 0$: la prima implicazione è dimostrata.

Per quello che riguarda l'implicazione inversa se $\det(A) \neq 0$ allora A ha rango n, essa si dimostra facilmente per assurdo osservando che se A non avesse rango n, allora la matrice ridotta A' avrebbe una riga nulla, e sviluppando il suo determinante secondo Laplace proprio rispetto a quella riga otterremmo $\det(A') = 0$ (in quanto ogni cofattore dello sviluppo andrebbe moltiplicato per zero). Ma poiché come abbiamo osservato nel dimostrare la prima implicazione il determinante della matrice ridotta è nullo se e solo se lo è quello della matrice di partenza, allora avremmo anche $\det(A) = 0$, contro l'ipotesi. $\square$

DA FARE

Osservazione 3.7. Nell'Osservazione 2.21 abbiamo visto un modo per passare da equazioni parametriche di un piano alla sua equazione cartesiana mediante eliminazione dei parametri t e s per sostituzione. Vediamo ora che grazie al determinante esiste un procedimento più elegante: le equazioni parametriche (1.46) possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}.$$

Quest'ultima uguaglianza ci dice che il vettore $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ si scrive come combinazione lineare di (l, m, n) e (l', m', n'), e quindi che la matrice

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & l & l' \\ y - y_0 & m & m' \\ z - z_0 & n & n' \end{pmatrix}$$

che ha tali vettori come colonne ha rango 2. Questo, per la proprietà appena dimostrata che afferma che una matrice quadrata di ordine n ha rango minore di n se e solo se il suo determinante è zero, equivale a dire che

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & l & l' \\ y - y_0 & m & m' \\ z - z_0 & n & n' \end{pmatrix} = 0. \tag{3.18}$$

Sviluppando questo determinante, si ottiene quindi un'equazione in x, y, z che è appunto l'equazione cartesiana del piano.

Ad esempio, supponiamo che il piano abbia equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t + 2s \\ z = 3 + t - s \end{cases}$.

Allora, la sua equazione cartesiana è data da

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z-3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero, sviluppando per esempio secondo Laplace rispetto alla prima colonna,

$$(x-1)\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - (y-2)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (z-3)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

cioè, svolgendo i calcoli,

$$-(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = -x + 2y + 3z - 12 = 0.$$

Nel caso in cui il piano sia quello passante per tre punti non allineati di coordinate (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), abbiamo visto nella (1.49) che in tal caso basta prendere $(l, m, n) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ e $(l', m', n') = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$, e quindi la (3.18) diventa

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.19}$$

che ci dà un modo per scrivere subito l'equazione cartesiana del piano che passa per i tre punti.

Osservazione 3.8. Tutte le proprietà del determinante che abbiamo visto valide per operazioni sulle righe sono vere anche se effettuiamo le stesse operazioni sulle colonne, ovvero:

(1) se A' si ottiene da A moltiplicando una colonna di A per $c \in \mathbb{K}$, allora $\det(A') = c\det(A)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la prima colonna per $c = 5$, ho $\det(A) = -2$ e $\det(A') = 5 \cdot 4 - 10 \cdot 3 = -10 = 5\det(A)$.

(2) se a una colonna C_i di una matrice A sommiamo una n-upla data v (scritta in colonna) si ha

$$\det(A') = \det(A) + \det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & v & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

Ad esempio, se alla seconda colonna C_2 della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sommiamo la coppia $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, ottenendo così $C_2' = C_2 + v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

come può essere verificato calcolando i determinanti (si ottiene $-2 = -5 + 3$).

(3) se A' si ottiene da A scambiando tra loro due colonne, allora $\det(A') = -\det(A)$

Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro la prima e la seconda colonna, ho $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ e $\det(A') = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = +2$.

Omettiamo la dimostrazione di queste tre proprietà.

FARE DA QUA SINO ALLA FINE DEL CAP.

Concludiamo questo capitolo mostrando come, benché non si possa calcolare il determinante di una matrice non quadrata, il determinante possa comunque essere usato per calcolare il rango di qualunque matrice.

Più precisamente, data una matrice A, chiamiamo *sottomatrice di* A una matrice che si ottiene da A scegliendo alcune righe e alcune colonne e cancellando le rimanenti. Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, allora scegliendo la prima e la terza riga e la terza e la quarta colonna (ovvero cancellando la seconda riga e le prime due colonne) si ottiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Teorema 3.9. Il rango di una matrice A è k se e solo se esiste una sottomatrice quadrata di A di ordine k con determinante diverso da zero e tutte le sottomatrici quadrate di ordine $k+1$ hanno determinante nullo.

Ad esempio, nella matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ troviamo una sottomatrice di ordine 1 con determinante[4] diverso da zero, per esempio la sottomatrice

[4] Una sottomatrice quadrata $A = (a)$ di ordine 1, che contiene una sola entrata, ha come determinante $\det(A) = a$.

$(a_{12}) = (1)$, e tutte le sue sottomatrici quadrate di ordine 2, ovvero $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ hanno, come si vede immediatamente, determinante uguale a zero: quindi in base al Teorema 3.9 la matrice ha rango 1, come in effetti già si vede notando che le sue due righe sono proporzionali.

In generale, per calcolare il rango di una matrice mediante il Teorema 3.9 basta iniziare a vedere se ci sono sottomatrici di ordine 1 con determinante diverso da zero (ovvero se c'è un'entrata non nulla); se non ne troviamo nessuna, concludiamo che il rango è zero; se ne troviamo almeno una, andiamo a vedere se ci sono sottomatrici di ordine 2 con determinante diverso da zero: se non ne troviamo, concludiamo che il rango era 1, se ne troviamo almeno una, andiamo a vedere quelle di ordine 3 e così via. Lo svantaggio di tale metodo è che può risultare molto laborioso calcolare tutti i determinanti di tutte le sottomatrici di A, per i vari ordini. Tuttavia, esso può essere semplificato nel modo seguente, che ci consente di controllare solo alcune sottomatrici e non tutte.

Più precisamente, data una sottomatrice quadrata A' di A ottenuta scegliendo k righe e k colonne, diciamo che una sottomatrice di ordine $k+1$ è ottenuta *orlando* A se si ottiene aggiungendo una riga e una colonna a quelle già scelte per determinare A'.

Ad esempio, nella matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ già vista sopra, la sottomatrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è stata ottenuta scegliendo la prima e la terza riga e la terza e la quarta colonna; aggiungendo ad esempio la seconda riga e la prima colonna ottengo $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: quindi A'' si ottiene orlando A'. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che corrisponde a scegliere prima, seconda e terza riga, e prima, seconda e terza colonna, non è invece ottenuta orlando A'.

Ora, il teorema precedente può essere migliorato come segue.

Teorema 3.10. (dei *minori orlati*) Il rango di una matrice A è k se e solo se esiste una sottomatrice quadrata A' di A di ordine k con determinante diverso da zero e tutte le sottomatrici quadrate di ordine $k+1$ ottenute orlando A' hanno determinante nullo.

Quindi per calcolare il rango di A possiamo procedere come segue: si inizia a vedere se ci sono sottomatrici di ordine 2 con determinante diverso da zero; se non ne troviamo nessuna, concludiamo che il rango è 1; se ne troviamo almeno una, diciamo A', andiamo a vedere se tra le sottomatrici di ordine 3 ottenute orlando A' (non è quindi necessario vederle tutte) ce ne sono con determinante diverso da zero: se non ne troviamo, concludiamo che il rango era 2, se ne troviamo almeno una, diciamo A'' andiamo a vedere quelle di ordine 4 che si ottengono orlando A'' e così via.

Esempio 3.11. Calcoliamo il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ usando il Teorema 3.10: prendiamo la sottomatrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ di ordine 2 ottenuta scegliendo prima e seconda riga, e terza e quarta colonna: essa ha determinante uguale a $1 \neq 0$, quindi il rango di A è almeno 2; per vedere se è 2 o 3, consideriamo le matrici di ordine 3 ottenute orlando A', ovvero $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (ottenuta aggiungendo la terza riga e la seconda colonna) e $A''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (ottenuta aggiungendo la terza riga e la prima colonna).
Ora, da un calcolo diretto usando lo sviluppo di Laplace si vede che $\det(A'') = 0$ e $\det(A''') = 0$, quindi concludiamo che il rango della matrice è 2.