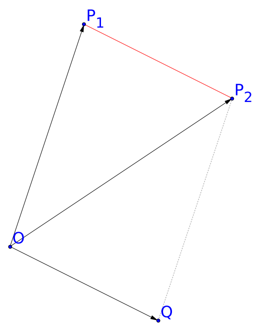
Coniche e quadriche

Prima di approfondire gli argomenti “coniche e quadriche”, rivediamo alcuni concetti utili:

- distanza tra due punti: ci servirà quando definiremo la *circonferenza*, l'*ellisse* e l'*iperbole*;
- distanza tra un punto e una retta: ci servirà quando definiremo la *parabola*.

1 Distanza tra due punti

Ricaviamo la formula per la distanza tra due punti P_1 e P_2 nello spazio.



Costruiamo il vettore $\overrightarrow{OQ}$ parallelo al segmento P_1P_2 e della stessa lunghezza. Si viene a formare un parallelogramma OQP_2P_1 e quindi, per definizione di somma tra vettori (regola del parallelogramma), possiamo scrivere $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP_1}$, ovvero $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$. Poiché per costruzione la distanza tra P_1 e P_2 coincide con la lunghezza del vettore $\overrightarrow{OQ}$, basta calcolare la lunghezza di quest'ultimo. Se le coordinate di P_1 (ovvero $\overrightarrow{OP_1}$) sono $[x_1, y_1, z_1]^T$ e le coordinate di P_2 (ovvero $\overrightarrow{OP_2}$) sono $[x_2, y_2, z_2]^T$, allora le coordinate di $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ sono $[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]^T$. Quindi

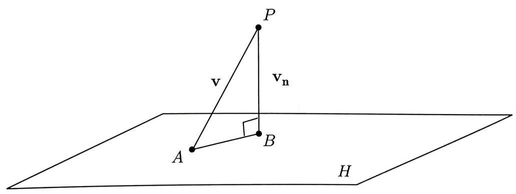
$$d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Con un ragionamento analogo si ottiene la formula per la distanza tra due punti nel piano

$$d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2 Distanza tra un punto e un piano (nello spazio)

Sia P un punto dello spazio di coordinate $[x_P, y_P, z_P]^T$ e sia H un piano di equazione $ax + by + cz = d$.



Ricaviamo la formula per la distanza tra il punto P e il piano H.

Fissiamo un punto A del piano. Il vettore normale $\mathbf{n} = [a, b, c]^T$ è perpendicolare al piano. La distanza cercata è la norma del vettore $\mathbf{v_n}$ (proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = \overrightarrow{AP}$ nella direzione normale al piano)

$$\mathbf{v_n} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n},$$

dove

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \\ z_P - z_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a(x_P - x_A) + b(y_P - y_A) + c(z_P - z_A).$$

Siccome A appartiene al piano, $ax_A + by_A + cz_A = d$, quindi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = ax_P + by_P + cz_P - d.$$

Quindi

$$d(P, H) = \|\mathbf{v_n}\| = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|^2}\|\mathbf{n}\| = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ax_P + by_P + cz_P - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3 Distanza tra un punto e una retta (nel piano)

Nel piano, vale una formula analoga per la distanza di un punto $P = [x_P, y_P]^T$ dalla retta r di equazione $ax + by = c$

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

4 Coniche e quadriche

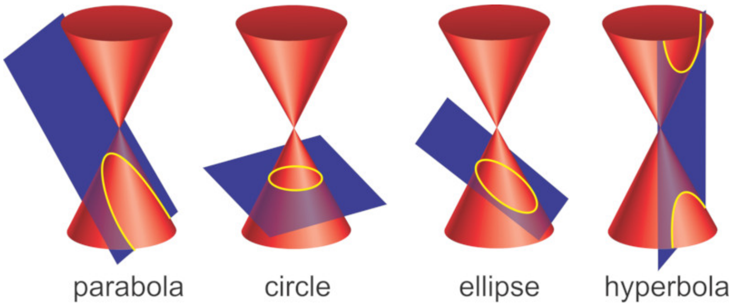


Tabella 1: Coniche.

1.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	ellisse
2.	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	iperbole
3.	$\dfrac{x^2}{a^2} - y = 0$	parabola
4.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	un punto
5.	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	insieme vuoto
6.	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	due rette incidenti
7.	$\dfrac{x^2}{a^2} = 1$	due rette parallele
8.	$\dfrac{x^2}{a^2} = 0$	una retta

Tabella 2: Quadriche.

1.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	ellissoide
2.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	iperboloide a una falda
3.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	iperboloide a due falde
4.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	paraboloide ellittico
5.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	paraboloide iperbolico
6.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	insieme vuoto
7.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	un punto
8.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	cono
9.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	cilindro ellittico
10.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	cilindro iperbolico
11.	$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$	cilindro parabolico
12.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	una retta
13.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	due piani incidenti
14.	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	due piani paralleli
15.	$\frac{x^2}{a^2} = 0$	un piano

Capitolo 1

Coniche

Tutti sappiamo che intersecando un piano e un cono si ottengono delle sezioni che proiettate sul piano risultano essere una circonferenza, un'ellisse, un'iperbole o una parabola. Queste curve vengono chiamate *coniche*.
Graficamente, una conica viene disegnata tramite una linea piana: fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, una linea piana può essere definita come traiettoria di un punto $P(t) = (x(t), y(t))$ che si muove nel piano secondo una data legge o come luogo geometrico dei punti $P = (x, y)$ le cui coordinate soddisfano un'equazione cartesiana del tipo $f(x, y) = 0$. Se $f(x, y)$ è un polinomio la curva si dice **algebrica**, altrimenti si dice **trascendente**. Il grado del polinomio si dice **ordine** della curva. In virtù di queste definizioni, possiamo dare la seguente importante definizione:

Definizione 1. Una **conica** σ è una linea piana algebrica del secondo ordine, ossia il luogo geometrico dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rappresentato da un polinomio di secondo grado nelle variabili x e y:

$$\sigma : \; f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,, \tag{1.1}$$

dove gli $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $a_{11}\,, a_{22}$ sono diversi da zero. Se $f(x, y)$ può essere decomposto nel prodotto di due polinomi di primo grado, ossia

$$f(x, y) = (ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0\,, \quad a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{C}\,,$$

la conica si dice *degenere*.

1.1 Circonferenza

Definizione 2. Una **circonferenza** è il luogo dei punti P aventi distanza costante r, detto **raggio**, da un punto fisso C, detto **centro**. In altre parole, tutti i punti della circonferenza sono tali da soddisfare la condizione:

$$d(P,C) = \|P - C\| = r.$$

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, se $C = (\alpha, \beta)$, il punto $P = (x, y)$ appartiene alla circonferenza se e solo se

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2. \tag{1.2}$$

La (1.2) viene detta **equazione cartesiana** della circonferenza σ di centro $C = (\alpha, \beta)$ e raggio r. Sviluppando i calcoli si ottiene

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \tag{1.3}$$

dove $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Da qui possiamo ricavare il raggio della circonferenza:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}. \tag{1.4}$$

Osservazione 3. Moltiplicando la (1.2) per un fattore $\lambda \neq 0$ si ottiene un'altra equazione che rappresenta la stessa circonferenza.

Osservazione 4. Per trovare le coordinate del centro e del raggio della circonferenza attraverso le (1.3) e (1.4) bisogna assicurarsi che la circonferenza sia reale, ossia $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$, e che i coefficienti di x^2 e y^2 siano uguali a 1.

Esempio 5. Trovare il centro e il raggio della circonferenza σ di equazione cartesiana $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$.
Soluzione: riscriviamo l'equazone cartesiana di σ nella forma (1.2) completando i quadrati:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16,$$

da cui si deduce che σ è la circonferenza di centro $C = (2, 3)$ e raggio $r = 4$.

Esempio 6. Stabilire le posizioni delle circonferenze $\sigma_1 : x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$ e $\sigma_2 : x^2 + y^2 + 2x = 0$.
Soluzione: la circonferenza σ_1 ha raggio $r_1 = 3$ e centro $C_1 = (-3, 4)$, mentre la circonferenza σ_2 ha raggio $r_2 = 1$ e centro $C_2 = (-1, 0)$. Per capire in che posizione risultano, possiamo osservare che due circonferenze si tagliano in

- due punti distinti se la distanza dei centri è minore della sonna dei raggi e maggiore della differenza (circonferenze secanti);
- in un punto se la distanza dei centri è uguale alla somma dei raggi;
- in nessun punto se la distanza dei centri è maggiore (minore) della somma (differenza) dei raggi.

Quindi, la distanza tra i centri è $\sqrt{20}$ che è maggiore della somma dei raggi ($r_1 + r_2 = 4$), di conseguenza le due circonferenze sono esterne.

Osservazione 7. Nell'esempio appena visto, possiamo arrivare allo stesso risultato semplicemente risolvendo il sistema composto dalle equazioni delle due circonferenze.

Date due circonferenze $\sigma_1 : x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1 = 0$ e $\sigma_2 : x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2 = 0$, non concentriche (ossia, hanno i centri diversi), consideriamo l'equazione

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1) + \mu(x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2) = 0$$

ottenuta come combinazione lineare delle equazioni delle due circonferenze, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Tale equazione si può riscrivere nel seguente modo:

$$(\lambda + \mu)(x^2 + y^2) - 2(\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \mu)x - 2(\beta_1 \lambda + \beta_2 \mu)y + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 = 0$$

che rappresenta ancora una circonferenza (ossia, è l'equazione del fascio di circonferenze) tranne nel caso in cui $\lambda + \mu = 0$, ossia $\mu = -\lambda$, con $\lambda \neq 0$. Infatti, in questo caso si ottiene l'equazione di una retta:

$$-2(\alpha_1\lambda - \alpha_2\lambda)x - 2(-\beta_1\lambda - \beta_2\lambda)y + \lambda\gamma_1 - \lambda\gamma_2 = 0,$$

da cui, dividendo per λ (ricordiamo che è diverso da zero!):

$$-2(\alpha_1 - \alpha_2)x - 2(-\beta_1 - \beta_2)y + \gamma_1 - \gamma_2 = 0$$

che rappresenta una retta in quanto $(\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)$ (i centri sono diversi). Tale retta viene chiamata **asse radicale del fascio di circonferenze**. I punti comuni a σ_1 e σ_2 per cui passa l'asse radicale vengono chiamati **punti base del fascio** in quanto tutte le circonferenze del fascio passano per essi. Si può far vedere che l'asse radicale è perpendicolare alla congiungente i centri delle due circonferenze e che tutti i centri delle circonferenze del fascio appartengono a tale congiungente. Questa congiungente viene chiamata **asse centrale del fascio**.

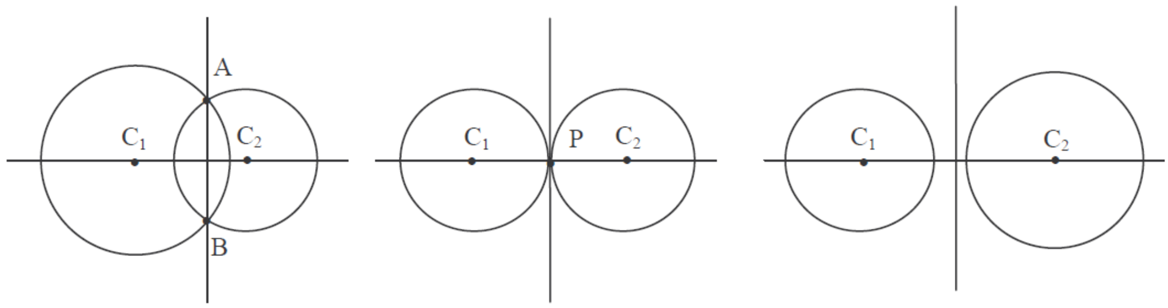


Figura 1.1: Rappresentazione fascio di circonferenze con asse radicale e asse centrale del fascio.

Se le due circonferenze sono tangenti, l'asse radicale passa per il punto di tangenza ed è perpendicolare all'asse centrale. Quindi coincide con la tangente comune a σ_1 e σ_2. Da qui segue che tutte le circonferenze tangenti ad una circonferenza σ in un suo punto P appartengono al fascio individuato da σ e dalla tangente a σ in P.

Esempio 8. Determinare l'equazione della circonferenza passante per l'origine e tangente la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ in $P = (1, 2)$.
Soluzione: le circonferenze tangenti σ in P appartengono al fascio individuato da σ e dalla tangente a σ in P e hanno equazione $\lambda(x^2 + y^2 - 2x - 3) + \mu(y - 2) = 0$. Dobbiamo scegliere λ e μ in modo che $(0, 0)$ soddisfi l'equazione, per cui deve essere $-3\lambda - 2\mu = 0$, ossia $\mu = -\dfrac{3\lambda}{2}$. Quindi l'equazione della circonferenza risulta $x^2 + y^2 - 2x - \dfrac{3}{2}y = 0$.

Supponiamo ora di aver fissato un riferimento positivo Oij. Sia P un punto sulla circonferenza (che supponiamo centrata nell'origine O) e θ l'angolo che il vettore $\vec{OP}$ forma con l'asse delle x, come in Fig. 1.2.
Ricordando le definizioni di seno e coseno, abbiamo le **equazioni parametriche** di una

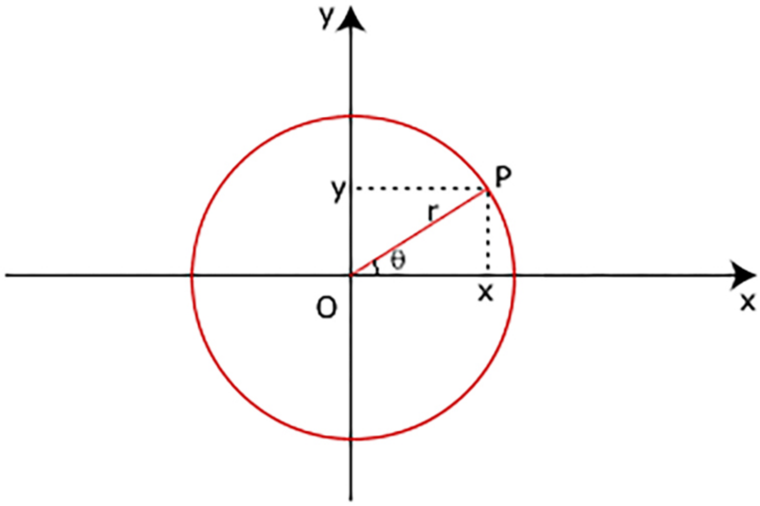


Figura 1.2: Costruzione della forma parametrica di una circonferenza

circonferenza centrata nell'origine:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ovviamente, se la circonferenza ha centro $C = (\alpha, \beta)$, con una traslazione di vettore (α, β) possiamo ricondurci al caso precedente, ottenendo quindi le **equazioni parametriche** di una circonferenza di centro $C = (\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + \alpha \\ y = r\sin\theta + \beta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

1.1.1 Intersezioni tra rette e circonferenze

Data la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ e la retta di equazione $ax + by + c = 0$, le intersezioni retta-circonferenza sono i punti del piano le cui coordinate risolvono il sistema formato dalle due equazioni. Si possono verificare tre casi:

- due punti reali di intersezione (retta secante);
- un solo punto reale di intersezione (retta tangente);
- nessun punto reale di intersezione (retta esterna). In realtà, ci sono due intersezioni complesse coniugate.

Esempio 9. Trovare le posizioni tra la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 = 10$ e la retta s di equazione $x - y = 0$.
Soluzione: osserviamo che la circonferenza è centrata nell'origine e che la retta passa per il punto $O = (0, 0)$, quindi sicuramente troviamo due punti di intersezione reali.
Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = x \end{cases}$$

otteniamo, ad esempio per sostituzione, l'equazione $x^2 = 5$. Per cui, le due curve si intersecano nei punti $P = (\sqrt{5}, \sqrt{5})$ e $Q = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

Esempio 10. Trovare le posizioni tra la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e la retta s di equazione $x = 1$.
Soluzione: osserviamo che la distanza di s dal centro di σ è uguale al raggio della circonferenza. D'altra parte, se risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

otteniamo, ~~ad esempio per sostituzione, l'equazione $x^2 = 5$. Per cui, le due curve si intersecano nei punti $P = (\sqrt{5}, \sqrt{5})$ e $Q = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$~~.

Esempio 11. Trovare per quali valori reali del parametro t la retta $s : tx+2y-4 = 0$ è secante, esterna, tangente alla circonferenza $\sigma : (x - 1)^2 + y^2 = 4$.
Soluzione: la distanza tra il centro $C = (1, 0)$ della circonferenza e la retta s è

$$d(s, \sigma) = \frac{|t - 4|}{\sqrt{t^2 + 4}}.$$

Per risolvere l'esercizio dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$$d(s, \sigma) > r$$

in modo da capire quando la retta è esterna, tangente, secante a σ. Ricordiamo che il raggio della circonferenza e la distanza $d(s, \sigma)$ sono numeri non negativi, quindi possiamo elevare entrambi i membri della disequazione al quadrato ottenendo:

$$\begin{aligned} &\frac{(t - 4)^2}{t^2 + 4} > 4 \\ &t^2 - 8t + 16 > 4t^2 + 16 \\ &3t^2 + 8t < 0, \end{aligned}$$

quindi:

- per $-\frac{8}{3} < t < 0$ la retta è esterna;
- per $t = 0$ e $t = -\frac{8}{3}$ la retta è tangente;
- per $t > 0$ e $t < -\frac{8}{3}$ la retta è secante.

1.1.2 Retta tangente ad una circonferenza in un suo punto

Sia $\sigma : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ una circonferenza del piano reale e sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un suo punto. La retta tangente in P_0 a σ è la retta per P_0 perpendicolare alla direzione del raggio, ossia al vettore

$$P_0 - C = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$$

e quindi si ha

$$s : (x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$x_0x + y_0y - \alpha x - \beta y - x_0^2 - y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 = 0.$$

Siccome il punto appartiene alla circonferenza, le sue coordinate ne soddisfano l'equazione:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma = 0$$

da cui

$$-x_0^2 - y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma - \alpha x_0 - \beta y_0.$$

L'equazione della retta tangente allora si può scrivere in questo modo:

$$x_0x + y_0y - \alpha x - \beta y + \gamma - \alpha x_0 - \beta y_0 = 0,$$

ossia

$$x_0x + y_0y - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) + \gamma = 0. \tag{1.5}$$

Questa formula si ottiene dall'equazione della circonferenza mediante la **regola degli sdoppiamenti**, ossia sdoppiando x^2 in x_0x, y^2 in y_0y, x in $\frac{x + x_0}{2}$, y in $\frac{y + y_0}{2}$.

Esempio 12. Data la circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ e il suo punto $P = (1, 2)$, trovare la retta tangente a σ nel punto P.
Soluzione: usando la regola degli sdoppiamenti, troviamo

$$x + 2y - (x + 1) - 0(y + 2) - 3 = 0,$$

ossia $y = 2$.

1.1.3 Rette tangenti ad una circonferenza passanti per un punto del piano

Vediamo adesso come si procede nel caso in cui il punto P_0 stia sul piano, ossia non necessariamente sulla circonferenza.
Se il punto è esterno alla circonferenza, ossia $d(P_0, C) > r$, si hanno evidentemente due rette reali tangenti a σ passanti per P_0. Se il punto sta sulla circonferenza ricadiamo nel caso trattato in alto (unica retta reale tangente). Se il punto è interno alla circonferenza è evidente che non si hanno rette tangenti nel piano reale.

Esempio 13. Data la circonferenza σ di equazione $x^2+y^2=1$ e il punto $P=(3,4)$, trovare le rette tangenti a σ nel punto P.
Soluzione: osserviamo che σ è centrata nell'origine e ha raggio 1. Il punto P dista 5 dall'origine, ossia P è esterno alla circonferenza. Esistono quindi due rette reali tangenti a σ passanti per P. Ricordando che, data una retta di equazione cartesiana $ax+by+c=0$ e un punto $P_0=(x_0,y_0)$ appartente ad essa, il fascio di rette di centro P_0 è rappresentato dall'equazione

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

nel nostro caso il fascio ha equazione $\lambda(x-3)+\mu(y-4)=0$. Notiamo inoltre che le due tangenti da trovare hanno distanza 1 dal centro O della circonferenza. Quindi, tra tutte le rette del fascio dobbiamo trovare quelle che distano 1 da O. La distanza della retta generica del fascio da O è

$$d=\frac{|\lambda(-3)+\mu(-4)|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}};$$

siccome $d=1$ abbiamo

$$[\lambda(-3)+\mu(-4)]^2=\lambda^2+\mu^2,$$

da cui

$$8\lambda^2+15\mu^2+24\lambda\mu=0.$$

Notiamo che se poniamo $\lambda=0$ otteniamo che anche $\mu=0$. Quindi possiamo imporre $\mu=1$ da cui si ricava $\lambda=\frac{-6\pm\sqrt{6}}{4}$. Questi sono i valori di λ e μ che ci permettono di scrivere le equazioni delle due tangenti.

1.2 Ellisse

Per costruire un'aiuola un giardiniere utilizza due paletti, un filo e un bastoncino che scalfisca il terreno. Pianta i due paletti in una posizione opportuna nella zona in cui vuole creare l'aiuola, lega ai due paletti gli estremi del filo (il filo deve avere lunghezza superiore alla distanza tra i paletti), tende il filo con il bastoncino e muove quest'ultimo (mantenendo teso il filo) in modo da scalfire il terreno. Ciò che traccia il bastoncino è il perimetro dell'aiuola, che matematicamente non è altro che il luogo dei punti P del piano tali che la somma $PF+PF'$ delle distanze di P da due punti fissi F e F' (cioè i paletti) è costante.

L'astronomo e matematico Keplero scoprì che le traiettorie dei pianeti intorno al sole sono circonferenze schiacciate, ossia ellissi aventi un fuoco nel sole stesso.

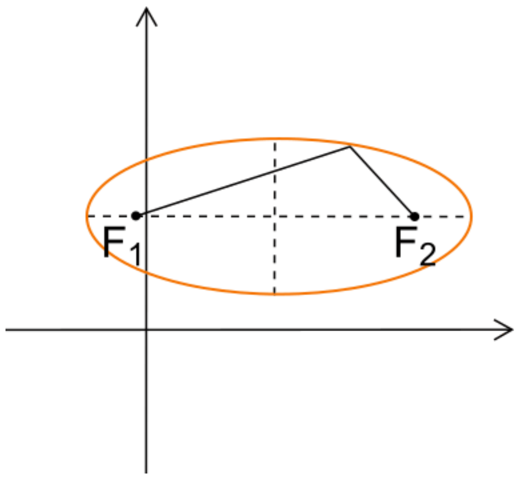


Figura 1.3: Ellisse e i suoi fuochi

Definizione 14. Si definisce **ellisse** di fuochi F e F' il luogo dei punti P del piano tali che la somma delle distanze di P da F e da F' è costante, ossia

$d(P,F)+d(P,F')=2a$

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a, \tag{1.6}$$

con $a \in \mathbb{R}$ non nullo.

Come possiamo vedere nella figura 1.3, un'ellisse presenta delle simmetrie rispetto alle rette (tratteggiate in figura) parallele agli assi cartesiani. Queste rette vengono chiamate **assi di simmetria** e si intersecano nel **centro** dell'ellisse. I punti estremi in cui gli assi incontrano l'ellisse vengono chiamati **vertici**. Effettuando una traslazione che porti il centro dell'ellisse sull'origine del sistema di riferimento, troviamo che i fuochi dell'ellisse giacciono sull'asse delle x e che gli assi di simmetria coincidono con gli assi cartesiani. Quindi $F=(c,0)$ e $F'=(-c,0)$. Consideriamo un punto $P=(x,y)$ appartenente all'ellisse. Sotto questa ipotesi che semplifica notevolmente la trattazione, sviluppiamo i calcoli nell'equazione (1.6):

$$\begin{aligned}
&\overline{PF}+\overline{PF'}=2a \;\Rightarrow\; \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \;\Rightarrow\\
&(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2\\
&2cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2cx\\
&4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&16c^2x^2-32a^2cx+16a^4=16a^2[(x-c)^2+y^2]\ (\text{dividiamo per } 16a^2)\\
&\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2=x^2-2cx+c^2+y^2\\
&\frac{c^2}{a^2}x^2-x^2-y^2=c^2-a^2\\
&\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2\\
&\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2.
\end{aligned}$$

Ponendo $b^2 = a^2 - c^2$ abbiamo $\frac{b^2}{a^2} + y^2 = b^2$. Dividendo per b^2 abbiamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.7}$$

che è **l'equazione canonica dell'ellisse in forma cartesiana**. a è il semiasse maggiore, b è il semiasse minore. Forma canonica vuol dire che l'equazione data rappresenta un'ellisse centrata nell'origine e con assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani.

Osservazione 15. Se nell'equazione (1.7) poniamo $a = b$ troviamo l'equazione della circonferenza centrata nell'origine e di raggio ~~unitario.~~ a $x^2 + y^2 = a^2$

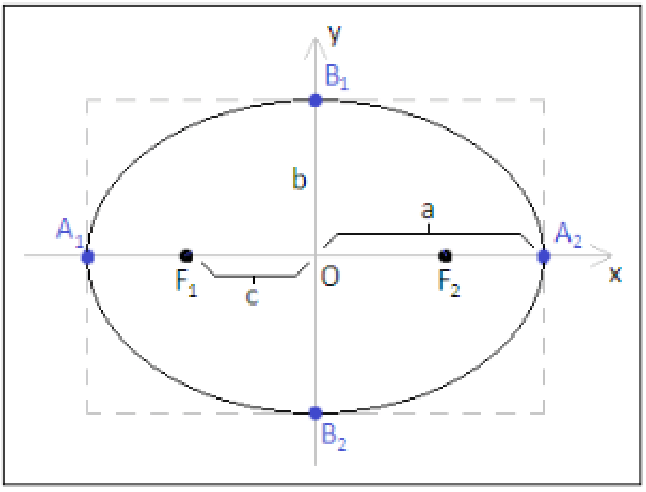


Figura 1.4: Ellisse in forma canonica

Osservazione 16. La condizione $b^2 = a^2 - c^2$ permette di ricavare l'ascissa dei fuochi conoscendo a e b.

Come per la circonferenza, ricordando le definizioni di seno e coseno, abbiamo le **equazioni parametriche** di una ellisse centrata nell'origine:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ovviamente, se l'ellisse ha centro $C = (\alpha, \beta)$, con una traslazione di vettore (α, β) possiamo ricondurci al caso precedente, ottenendo quindi le **equazioni parametriche** di un'ellisse di centro $C = (\alpha, \beta)$:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta + \alpha \\ y = b\sin\theta + \beta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Osservazione 17. Nel caso in cui il semiasse maggiore sia b e quindi giaccia sull'asse delle y, il punto di partenza della dimostrazione per ricavare l'equazione dell'ellisse in forma canonica deve essere $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2b$. Ovvero, si ottiene dall'equazione (1.7) con una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario.

Osservazione 18. L'equazione

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

rappresenta un'ellisse di centro $C = (p, q)$ con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati e semiassi a e b. Basta infatti porre il cambiamento di coordinate $X = x - p$, $Y = y - q$.

Osservazione 19. Dalla Fig. 1.4 si vede che l'ellisse è tutta contenuta nel rettangolo limitato dalle rette $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Esempio 20. Verificare che $\sigma : x^2 + 16y^2 = 4$ è un'ellisse e trovarne i semiassi, i vertici e i fuochi.
Soluzione: dividendo entrambi i membri per 4 si ottiene

$$\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1,$$

ossia

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Da qui si vede che si tratta di un'ellisse i cui semiassi sono $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$, i vertici sono $(-2, 0), (2, 0), (0, -1/2), (0, 1/2)$. Siccome $a > b$ i fuochi sono sull'asse delle x:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

per cui i fuochi sono $F = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$ e $F' = \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$.

1.3 Iperbole

La proporzionalità inversa tra due quantità stabilisce che al crescere di una diminuisce l'altra, rimanendo però costante il loro prodotto. In fisica, ad esempio, si studia la legge di Ohm che afferma che la corrente in un conduttore tra due punti è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale V tra i due punti stessi. In formule, $V = Ri$, dove R è la resistenza elettrica e i è l'intensità di corrente.

Definizione 21. Si definisce **iperbole** di fuochi F e F' il luogo dei punti P del piano tali che la differenza delle distanze di P da F e da F' è costante, ossia

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a, \tag{1.8}$$

con $a \in \mathbb{R}$ non nullo.

Osservazione 22. Nell'equazione (1.8) è importante mettere il valore assoluto perchè in generale non sappiamo quale delle due distanze sia maggiore e dobbiamo assicurarci che la distanza sia positiva.

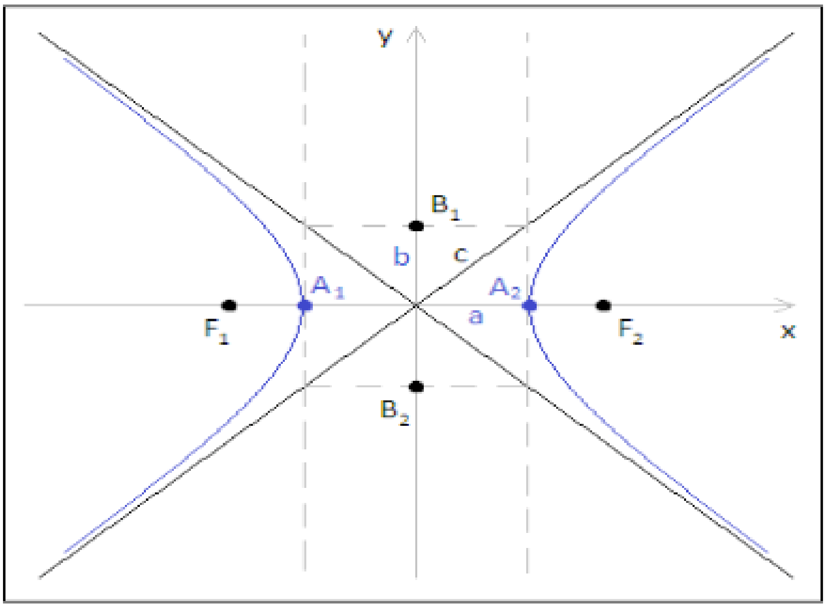


Figura 1.5: Iperbole e suoi elementi

Con un calcolo simile a quello fatto per l'ellisse possiamo ricavare

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.9}$$

che è **l'equazione canonica dell'iperbole in forma cartesiana**. a è il semiasse orizzontale, b è il semiasse verticale. Le curva che costituiscono l'iperbole vengono chiamate **rami** dell'iperbole. Gli **assi** dell'iperbole sono le rette rispetto alle quali l'iperbole viene suddivisa in due parti uguali e simmetriche, mentre i punti di intersezione con uno dei due assi vengono chiamati **vertici** dell'iperbole. Le rette che passano per il centro e a cui si approssimano i rami dell'iperbole all'infinito si chiamano **asintoti** e hanno equazione $y = \pm\frac{b}{a}x$. Se gli asintoti sono tra loro ortogonali l'iperbole si dice **equilatera**.

Osservazione 23. Nel caso di un'iperbole con fuochi e vertici nell'asse delle x l'ascissa c e $-c$ dei fuochi si trova mediante la relazione $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Osservazione 24. Consideriamo un'iperbole σ con asintoti r_1 e r_2. Sia r una retta che interseca σ in due punti reali $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Siano $Q_1 = (x'_1, y'_1)$ e $Q_2 = (x'_2, y'_2)$ le intersezioni di r con r_1 e r_2. Allora i segmenti $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$ hanno lo stesso punto medio.

Osservazione 25. L'equazione

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

rappresenta un'iperbole di centro $C = (p, q)$ con assi paralleli agli assi coordinati $x = p$ e $y = q$. Basta infatti porre il cambiamento di coordinate $X = x - p$, $Y = y - q$.

Esempio 26. Verificare che $\sigma : x^2 - 4y^2 = 4$ è un'iperbole e trovarne la distanza tra i vertici, i fuochi e gli asintoti.
Soluzione: l'equazione si può riscrivere nella forma

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

Si tratta quindi di un'iperbole di semiassi 2 e 1. La distanza tra i vertici è 4. Inoltre $c = \sqrt{5}$ e quindi i fuochi sono $F = (\sqrt{5}, 0)$ e $F' = (-\sqrt{5}, 0)$. Gli asintoti sono le rette $y = \pm\frac{x}{2}$.

1.4 Parabola

Quando si lancia una pietra in aria, questa inizialmente sale verso l'alto e, una volta raggiunta un'altezza massima, inizia la discesa verso il basso. La traiettoria disegnata dalla pietra è una parabola.

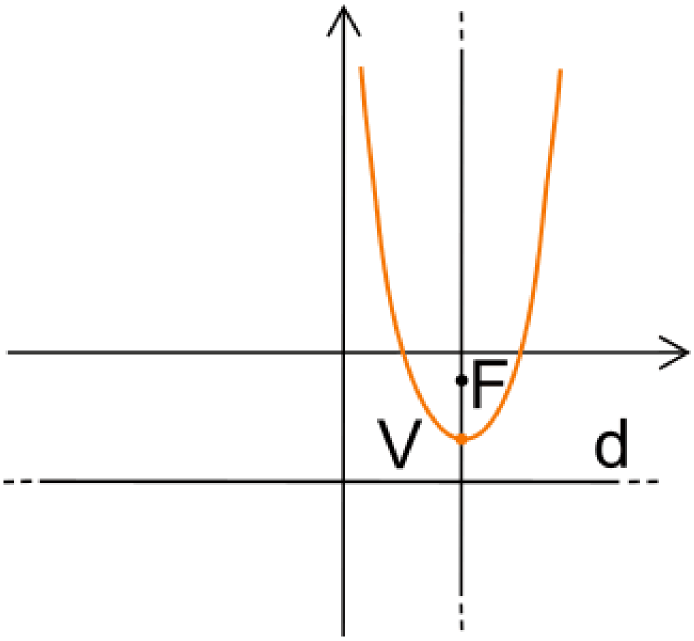


Figura 1.6: Parabola con asse verticale

Definizione 27. Si definisce **parabola** di fuoco F e direttrice d il luogo dei punti P equidistanti da un punto fisso, ossia

$$\mathrm{dist}(P, d) = \overline{PF}. \tag{1.10}$$

Sviluppando i calcoli dell'equazione (1.10) possiamo ricavare

$$x^2 = 2py \qquad \cancel{x^2 = 2px}, \; p \neq 0 \tag{1.11}$$

che è **l'equazione canonica della parabola in forma cartesiana**. In questa forma, siccome la variabile x è al quadrato, la parabola ha vertice nell'origine, asse di simmetria coincidente con l'asse delle y e direttrice parallela all'asse delle x. Ogni altra parabola si può ottenere da questa mediante rototraslazioni.

Esempio 28. Studiare la curva $\sigma : x = 3y^2 + 4y + 1$.
Soluzione: si tratta di una parabola traslata. Per ricavare la forma canonica bisogna completare i quadrati (farlo per esercizio). Otteniamo quindi:

$$x + \frac{1}{3} = 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2.$$

Con la traslazione di equazioni $X = x + \frac{1}{3}$, $Y = y + \frac{2}{3}$ l'equazione diventa $X = 3Y^2$. Quindi rispetto alle coordinate XY si hanno quindi le seguenti informazioni: l'asse è $Y = 0$ e il vertice è l'origine.

Osservazione 29. La parabola è l'unica conica senza centro.

1.5 Esercizi proposti

1. Dire quali tra le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza e, in tal caso, determinarne centro e raggio:

   i) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ $[C = (0, 1), r = 2]$

   ii) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ $[C = (1, 2), r = 0]$

   iii) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 12 = 0$ [no]

2. Scrivere l'equazione della circonferenza σ di centro $C = (1, -2)$ e soddisfacente ad una delle seguenti condizioni:

   i) di raggio 2 $[x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0]$

   ii) passante per il punto $P = (3, 1)$ $[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0]$

   iii) tangente all'asse x $[x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0]$

   iv) tangente alla retta s di equazione $x - y + 1 = 0$ $[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0]$

3. Dati la circonferenza $\sigma : x^2 + y^2 - 2x = 0$ e i due punti $A = (3, 0)$ e $B = (0, 0)$, dire se i punti appartengono alla circonferenza o se sono esterni o interni. Se possibile, condurre da essi le tangenti a σ.

   [A esterno, tangenti da A: $y = \pm(x - 3)/\sqrt{3}$; $B \in \sigma$, tangente in B: $x = 0$]

4. Determinare l'equazione della parabola avente fuoco $F = (-1, -3)$ e direttrice $x = y$. (Hint: ricordare l'equazione (1.1) che definisce una conica non in forma canonica.) $[(x + y)^2 + 4x + 12y + 20 = 0]$

5. Determinare l'equazione dell'iperbole di fuochi $F_1 = (-2, 2)$ e $F_2 = (4, 2)$ tale che la differenza delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi sia, in valore assoluto, uguale a 4. (Hint: ricordare l'equazione (1.1) che definisce una conica non in forma canonica.) $[5x^2 - 4y^2 + 16y + 14x - 71 = 0]$

6. Stabilire per quali valori del parametro reale t l'equazione $3x^2 + 3y^2 - tx + 2t = 0$ rappresenta una circonferenza. $[t < 0, t > 8]$

7. Dimostrare che l'equazione della circonferenza passante per i tre punti $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ si può ottenere calcolando il seguente determinante 4×4:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_0^2 + y_0^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.6 Coniche in forma non canonica

Sorge il problema di capire che tipo di conica rappresenta il polinomio

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

che ci troviamo a studiare. Come si può notare, la (1.1) è una forma quadratica rappresentata dalla matrice simmetrica reale

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e sfruttando la notazione matriciale la (1.1) può essere riscritta come

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \,. \tag{1.12}$$

Consideriamo inoltre la sottomatrice principale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Osservazione 30. Una conica è non degenere se e solo se $\det B \neq 0$.

Si può dimostrare il seguente teorema di classificazione delle coniche:

Teorema 31. *Sia σ una conica (degenere oppure no) e sia B la matrice associata alla (1.1). Allora:*

- $\boxed{rg\ B\ = 3}$:
  - $\det A < 0 \quad \to \quad$ *iperbole*
  - $\det A > 0 \quad \to \quad$ *ellisse*
    - $\det B\, tr\ A < 0 \quad \to \quad$ *ellisse reale*
    - $\det B\, tr\ A > 0 \quad \to \quad$ *ellisse immaginaria*
  - $\det A = 0 \quad \to \quad$ *parabola*
- $\boxed{rg\ B\ = 2}$:
  - $\det A > 0 \quad \to \quad$ *punto (ottenuto come intersezione di due rette complesse incidenti)*
  - $\det A < 0 \quad \to \quad$ *due rette incidenti in un punto*
- $\boxed{rg\ B\ = 1}$: $\quad \to \quad$ *retta*

Osservazione 32. Se rg$B = 2$ e $\det A = 0$, l'equazione della conica può essere riscritta nella forma

$$(ax + by + c)^2 \pm d^2 = 0\,, \tag{1.13}$$

dove con il segno + troviamo due rette complesse coniugate, mentre con il segno - abbiamo una coppia di rette parallele. Per esempio, la matrice B associata a $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ ha rango 2 e A ha determinante nullo. Completando i quadrati si ottiene $(x + 2y - 1)^2 - 4 = 0$, ossia la conica degenera in una coppia di rette parallele.

Esempio 33. Classificare la conica di equazione $x^2 + 4xy - 2y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$.
Soluzione: per prima cosa scriviamo le matrici associate:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Operando una riduzione a gradini si trova che il rango di B è 3. Inoltre, $\det A = -6 < 0$ quindi σ è un'iperbole.

Osserviamo che in un'equazione del tipo (1.1) il termine misto, ossia quello in xy, indica che gli assi di simmetria non sono paralleli agli assi coordinati. Con una rotazione antioraria del piano di angolo θ possiamo fare in modo che il termine misto si annulli e quindi possiamo ottenere una conica con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati. Vediamo con un esempio tale procedimento.

Esempio 34. Considerata l'iperbole dell' Esempio 33, applicare una rotazione antioraria di angolo θ che porti gli assi dell'iperbole sugli assi cartesiani.
Soluzione: le equazioni della rotazioni richiesta sono

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \sin\theta x + \cos\theta y \end{cases}$$

le cui relazioni inverse sono

$$\begin{cases} x = \cos\theta x' + \sin\theta y' \\ y = -\sin\theta x' + \cos\theta y' \,. \end{cases}$$

Sostituiamo queste trasformazioni nell'equazioni della conica:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & (\cos\theta x' + \sin\theta y')^2 + 4(\cos\theta x' + \sin\theta y')(-\sin\theta x' + \cos\theta y') \\ & - 2(\cos\theta x' + \sin\theta y')^2 + 6(\cos\theta x' + \sin\theta y') - 2(\cos\theta x' + \sin\theta y') + 1 = \\ = {} & \cos^2\theta x'^2 + 2\sin\theta\cos\theta x'y' + \sin^2\theta y'^2 - 4\sin\theta\cos\theta x'^2 + 4\cos^2\theta x'y' \\ & - 4\sin^2\theta x'y' + 4\sin\theta\cos\theta y'^2 - 2\cos^2\theta x'^2 - 2\sin^2\theta y'^2 - 4\sin\theta\cos\theta x'y' \\ & + 6\cos\theta x' + 6\sin\theta y' - 2\cos\theta x' - 2\sin\theta y' + 1 = \cdots \end{aligned}$$

Ricordando il significato del termine misto, il nostro obiettivo è annullare il coefficiente del termine in xy, ossia dobbiamo imporre

$$2\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta - 4\sin^2\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 0$$

che riscriviamo come

$$2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta = 0\,.$$

A questo punto basta risolvere l'equazione trigonometrica

$$2\tan^2\theta + \tan\theta - 2 = 0\,.$$

Come abbiamo detto quando abbiamo trattato le coniche in forma canonica, non sempre l'equazione che stiamo studiando rappresenta una conica con centro/vertice nell'origine e assi coincidenti con gli assi cartesiani. Ovviamente, in questi casi possiamo sempre operare una traslazione (nei casi un po' più complessi una rototraslazione) per ricondurci alla situazione nota. In altre parole, vale la seguente

Definizione 35. (conica in forma canonica) Esiste un sistema di riferimento ortogonale in cui la conica (1.1) ha una delle seguenti forme canoniche:

1. $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$
2. $\alpha x^2 = 2\gamma y$
3. $\beta y^2 = 2\gamma x$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Vediamo nel dettaglio quali coniche rappresentano le tre forme canoniche della definizione.

1. $\boxed{\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma}$: supponiamo che α, β, γ siano diversi da zero. Allora:
   - se α, β, γ hanno tutti e tre lo stesso segno, possiamo dividere per γ ottenendo
   $$\frac{\alpha}{\gamma}x^2 + \frac{\beta}{\gamma}y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\right)^2} = 1$$
   che è l'equazione dell'ellisse centrata nell'origine e con assi di simmetria dati da $\frac{\gamma}{\alpha}$ e $\frac{\gamma}{\beta}$;
   - se α, β hanno lo stesso segno ma γ ha segno diverso da α e β otteniamo un'ellisse immaginaria;
   - se α e β hanno segno diverso si ottiene un'iperbole.

   Supponiamo ora che $\alpha\beta\gamma = 0$. Allora:
   - $\gamma = 0$ porta a $\alpha x^2 + \beta y^2 = 0$. Se $\alpha\beta > 0$ si ottiene la decomposizione
   $$(\sqrt{\alpha}x + i\sqrt{\beta}y)(\sqrt{\alpha}x - i\sqrt{\beta}y) = 0\,,$$
   cioè due rette complesse coniugate. Mentre se $\alpha\beta < 0$ si ottiene il prodotto di due rette reali che si intersecano nell'origine.
   - $\alpha, \gamma = 0$ $(\beta, \gamma = 0)$ porta a $\beta y^2 = 0$ $(\alpha x^2 = 0)$ che rappresenta due rette reali coincidenti.
   - $\alpha = 0$ $(\beta = 0)$ ci da $y = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$. Se $\gamma\beta > 0$ abbiamo due rette reali parallele, mentre se $\gamma\beta < 0$ abbiamo due rette complesse coniugate.

2. $\boxed{\alpha x^2 = 2\gamma y}$: se $\alpha\gamma \neq 0$ si ha $x^2 = \frac{2\gamma}{\alpha}y$ che rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse x, mentre se $\gamma = 0$ abbiamo una coppia di rette coincidenti.

3. $\boxed{\beta y^2 = 2\gamma x}$: Simile al precedente.

Teorema 36. *(riduzione di una conica a forma canonica) Data una conica (degenere oppure no), è sempre possibile trovare un cambiamento di riferimento che porta la conica in forma canonica.*

In pratica, per trovare la forma canonica partendo dall'equazione

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

bisogna diagonalizzare la matrice A associata alla parte quadratica dell'equazione e scrivere le equazioni della rototraslazione. Prima di vedere un esempio dettagliato di riduzione a forma canonica, ci chiediamo come si trovano gli assi di una conica a centro. A questa domanda risponde la seguente

Proposizione 37. *Gli assi di una conica a centro sono paralleli agli autovettori di A e passano per il centro della conica.*

Il seguente esempio mostra il modo generale di procedere quando si vuole ridurre a forma canonica una qualunque conica.

Esempio 38. Ridurre a forma canonica la conica di equazione

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y - 1 = 0\,.$$

Soluzione: osserviamo che si tratta di un'ellisse (basta verificarlo controllando il rango e il determinante delle matrici associate). Il primo passo da fare per ridurre una conica in forma canonica consiste nel trovare gli autovalori della matrice A associata alla parte quadratica dell'equazione. Risolvendo quindi

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

troviamo gli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, mentre gli autospazi sono $V_{\lambda_1} : x + y = 0$ e $V_{\lambda_2} : x - y = 0$. La matrice della rotazione si trova mettendo in colonna gli autovettori normalizzati della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cioè la matrice della rotazione è

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

A questo punto possiamo scrivere le equazioni del cambiamento di riferimento:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione della conica, ossia in $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 2y - 1 = 0$ otteniamo

$$(x'+y')^2 + (-x'+y')^2 + (x'+y')(-x'+y') + \frac{2}{\sqrt{2}}(x'+y') - \frac{2}{\sqrt{2}}(-x'+y') - 1 = 0$$

$$2(x')^2 + 2(y')^2 + (y')^2 - (x')^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - 1 = 0$$

$$x'^2 + 3y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 1 = 0.$$

In altre parole, con una rotazione di $-\dfrac{\pi}{4}$ abbiamo fatto in modo che gli assi della conica coincidano con gli assi cartesiani (ossia abbiamo eliminato il termine misto).

Dobbiamo ora trovare la traslazione che porta il centro della conica nell'origine. Per farlo completiamo i quadrati nell'equazione $x'^2 + 3y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 1 = 0$. Scriviamo quindi

$$(x' + \sqrt{2})^2 + 3y'^2 - 3 = 0$$

da cui ricaviamo la traslazione di equazioni

$$\begin{cases} X = x' + \sqrt{2} \\ Y = y' \end{cases}$$

e quindi possiamo scrivere $X^2 + 3Y^2 - 3 = 0$, ossia l'equazione della conica in forma canonica è:

$$\frac{X^2}{3} + Y^2 = 1.$$

Questa è un'ellisse (come già osservato all'inizio) centrata nell'origine del sistema di riferimento, con semiassi $a = \sqrt{3}$ e $b = 1$.
Tenuto conto che $x' = R^{-1}x$ si ha

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi la trasformazione che porta l'ellisse in forma canonica è

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo adesso che il centro dell'ellisse nel riferimento OXY è il punto $(0, 0)$. Per avere il centro originario basta risolvere l'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) + \sqrt{2} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = 0 \end{cases}.$$

Riscrivendo questo sistema nella forma equivalente

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases},$$

si ottiene il punto $(-1, 1)$ che è il centro di simmetria dell'ellisse non canonica. Gli assi di simmetria passano per il centro e sono paralleli agli autovettori di A, quindi hanno equazioni $x + y = 0$ e $x - y + 2 = 0$.

Proposizione 39. *L'asse di una parabola è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo. Nel caso particolare in cui* $a_{12} = 0$*, l'asse è parallelo alla retta* $a_{11}x + a_{12}y = 0$*.*

Esempio 40. Data la parabola $x^2 - 4xy + 4y^2 - 14x - 2y + 3 = 0$, determinarne l'asse di simmetria.

Soluzione: dalla proposizione 39 sappiamo che per trovare l'asse di simmetria dobbiamo cercare l'autospazio relativo all'autovalore nullo. Si noti che, essendo una parabola, bisogna necessariamente avere un autovalore nullo. Costruiamo le matrici A e B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -2 & 4 & -1 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$(1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0\,.$$

Consideriamo $\lambda = 0$: è evidente che nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

la seconda riga è multiplo della prima. Quindi troviamo gli autovettori $(2t, t)$, ossia $(2, 1)$. Di conseguenza, l'asse è parallelo alla retta r di equazione $x - 2y = 0$. A questo punto, cerchiamo la retta tangente alla parabola che sia allo stesso tempo perpendicolare al suo asse: in questo modo, il punto di tangenza è esattamente il vertice della parabola e così resta determinato unicamente l'asse di simmetria della parabola. Nel nostro caso, la generica retta r' perpendicolare a r ha equazione $y = 2x + q$. Per trovare il particolare q che rende r' tangente alla parabola, sostituiamo $y = -2x + q$ nell'equazione della parabola:

$$\begin{aligned} &x^2 - 4x(-2x + q) + 4(-2x + q)^2 - 14x - 2(-2x + q) + 3 = 0 \\ &25x^2 - x(20q + 10) + 4q^2 - 2q + 3 = 0\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ovviamente, per far sì che la retta sia tangente alla curva, bisogna imporre che il discriminante dell'equazione di secondo grado appena trovata sia nullo. In formule,

$$(20q + 10)^2 - 100(4q^2 - 2q + 3) = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}\,.$$

Per trovare il punto di tangenza, sostituiamo $q = \frac{1}{3}$ nell'equazione (1.14):

$$25x^2 - \frac{50}{3}x + \frac{25}{9} = 0$$

che risolta ci da $x = \frac{1}{3}$, che sostituita in r' ci da $y = -\frac{1}{3}$. Queste sono le coordinate del vertice della parabola.

Il vertice è anche un punto dell'asse di simmetria (essendo l'unico punto di intersezione tra la parabola e l'asse), quindi sostituendo le sue coordinate in r otteniamo $q = -\frac{1}{2}$ e quindi l'equazione dell'asse di simmetria è $x - 2y - 1 = 0$.

Esempio 41. Studiare la conica $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.
Soluzione: si tratta di una conica degenere (lo si verifichi per esercizio). Consideriamo l'equazione data come equazione di secondo grado nella variabile x:

$$x^2 + x(2y - 2) + (y^2 - 2y + 1) = 0.$$

Notiamo che possiamo riscriverla come

$$x^2 + x(2y - 2) + (y - 1)^2 = 0.$$

Risolvendo rispetto alla x troviamo:

$$x = \frac{(2 - 2y) \pm \sqrt{4y^2 - 8y + 4 - 4y^2 - 4 + 8y}}{2} = (1 - y),$$

ossia $x = 1 - y$ ha molteplicità algebrica 2. Quindi la conica data è la retta $x + y - 1 = 0$ contata due volte.

Quando intersechiamo una retta e una conica, si ottengono vari casi a seconda che la conica sia degenere oppure no. Algebricamente, sostituendo l'equazione della retta nell'equazione della conica si può ottenere un'equazione di grado zero oppure di grado uno oppure di grado due (ogni caso ha due sottocasi riguardanti la conica degenere e la conica non degenere). Nel caso in cui si ottiene un'equazione di secondo grado, le radici possono essere due reali distinte, due complesse coniugate oppure due reali coincidenti. Nell'ultimo caso diremo che la molteplicità di intersezione tra la conica σ e la retta r è 2.

Definizione 42. Data una conica σ e una retta r, sia P_0 un punto appartenente a σ. Diremo che r è tangente a σ in P_0 se si verifica una delle seguenti possibilità:

- la molteplicità tra r e σ in P_0 è 2
- r è contenuta in σ.

Teorema 43. *sia σ una conica non degenere e sia $P_0 = (x_0, y_0) \in \sigma$. Allora esiste un'unica tangente a σ in P_0 e la sua equazione è data da*

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,, \tag{1.15}$$

La (1.15) viene anche detta *regola dello sdoppiamento*, così come visto nel caso della circonferenza. Questa regola vale quindi per qualunque conica. Infatti, per ottenerla basta considerare l'equazione della conica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

e riscriverla come

$$a_{11}x_0x + a_{12}x_0y + a_{12}xy_0 + a_{22}y_0y + a_{13}x_0 + a_{13}x + a_{23}y_0 + a_{23}y + a_{33} = 0\,.$$

1.7 Esercizi proposti

1. In ciascuno dei seguenti casi si determini una rototraslazione che pone la curva in posizione canonica; si dica quindi di che tipo di conica si tratta e, in caso abbia un centro o degli assi di simmetria, li si determini; infine, si disegni approssimativamente la curva.

   i) $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + x - \sqrt{3}y + \frac{1}{32} = 0$ $[4x''^2 + 8y''^2 = \frac{1}{32}]$

   ii) $6x^2 - 24xy - y^2 + 10x + 1 = 0$ $[15x'' - 10y'' + \frac{5}{6} = 0]$

   iii) $3x^2 + 8xy + \frac{16}{3}y^2 + \frac{25}{9}x = 0$ $[\frac{25}{3}y''^2 + \frac{20}{9}x'' = 0]$

2. Determinare t in modo che la conica $xy + 2x - 4y + t = 0$ sia degenere e per questi valori di t determinare le rette che costrituiscono la conica.

   $[t = -8,\ x - 4 = 0,\ y + 2 = 0]$

3. Trovare l'equazione della retta tangente alla conica $\sigma : x^2 + 2xy + 2y^2 - 5 = 0$ passante per il punto $A = (1, 1)$. $[2x + 3y - 5 = 0]$

4. Dimostrare che l'equazione $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2 = 0$ rappresenta un'iperbole in un nuovo sistema di riferimento ottenuto con una rotazione di $\frac{\pi}{6}$ in senso antiorario.

5. Dimostrare che l'equazione $5x^2+7y^2+2\sqrt{3}xy = 2$ rappresenta un'ellisse in un nuovo sistema di riferimento ottenuto con una rotazione di $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario.

6. Sia $\sigma : f(x, y) = 0$ un'iperbole e sia A la matrice dei termini di secondo grado associata a f. Sapendo che si definisce **traccia** della matrice A, e si indica con $\mathrm{tr}(A)$, la somma degli elementi della diagonale principale, dimostrare che σ è equilatera se e solo $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Capitolo 2

Quadriche

Le quadriche sono l'analogo nello spazio delle coniche.

Definizione 44. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio, una quadrica è il luogo dei punti P le cui coordinate (x, y, z) soddisfano la seguente equazione

$$\Gamma : \; a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}x+a_{22}y^2+2a_{23}yz+2a_{24}y+a_{33}z^2+2a_{34}z+a_{44} = 0\,, \tag{2.1}$$

ossia una quadrica è un polinomio di secondo grado in x, y, z con $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

2.1 Sfera

La superficie sferica è l'analogo nello spazio della circonferenza nel piano.

Definizione 45. La **sfera** è il luogo dei punti P dello spazio aventi distanza fissata $r > 0$, detta **raggio**, da un punto fisso C, detto **centro**, ossia

$d(P, C) = r$

$$\overline{PC} = r.$$

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale, fissato un numero reale positivo r e indicate con (α, β, γ) le coordinate di C, la condizione affinchè un punto $P = (x, y, z)$ appartenga alla sfera è espressa dall'equazione

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2, \tag{2.2}$$

da cui, sviluppando i calcoli, otteniamo

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

$$\cancel{x^2 + y^+ z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0}, \tag{2.3}$$

con $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2$. Possiamo quindi notare che l'equazione della sfera è simile all'equazione (2.1) ma con i coefficienti di x^2, y^2, z^2 uguali e i termini misti tutti nulli.

Osservazione 46. Affinchè un polinomio del tipo (2.2) rappresenti una sfera dobbiamo assicurarci che il numero $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$ deve essere non negativo.

Esempio 47. Stabilire se l'equazione $3x^2+3y^2+3z^2-2x+5y+21=0$ rappresenta una sfera.

Soluzione: essendo $r = \sqrt{-\dfrac{223}{36}}$ un numero non reale, l'equazione data non rappresenta una sfera.

Osservazione 48. Se il raggio è nullo allora la sfera degenera nel suo centro.

2.1.1 Posizione tra rette e sfere, piani e sfere

Posizione tra retta e sfera. Per trovare i punti di intersezione tra una sfera S di equazione (2.2) e una retta r di equazione parametrica $(x, y, z) = (x_0+lt, y_0+mt, z_0+nt)$ basta risolvere l'equazione di secondo grado nella variabile t che si ottiene sostituendo le equazioni della retta nell'equazione della sfera. Si distinguono tre casi:

- l'equazione non ha soluzioni (la retta non interseca la sfera);
- l'equazione ha un'unica soluzione (la retta è tangente alla sfera in un punto);
- l'equazione ha due soluzioni (la retta interseca la sfera in due punti distinti).

Stabilire per quali valori reali di λ la retta r di equazioni $(x, y, z) = (\lambda t, t, t)$ è secante, tangente o esterna alla sfera S di equazione $x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 3 = 0$.
Soluzione: intersecando r con S si trova l'equazione

$$t^2\lambda^2 + t^2 + (t-2)^2 - 3 = 0,$$

ossia

$$(\lambda^2 + 2)t^2 - 4t + 1 = 0.$$

Il discriminante di questa equazione di secondo grado in t è $8 - 4\lambda^2$, per cui a seconda del valore di λ abbiamo un discriminante che può essere positivo, negativo o nullo.

- L'equazione ha due soluzioni reali distinte per $-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2}$ e quindi la retta è secante e la sua distanza dal centro $C = (0, 0, 2)$ è minore del raggio $r = \sqrt{3}$;
- l'equazione ha due soluzioni coincidenti per $\lambda = \pm\sqrt{2}$ e quindi la retta è tangente e la sua distanza da C è $\sqrt{3}$;
- l'equazione non ha soluzioni reali per $\lambda < \sqrt{2}$ o $\lambda < -\sqrt{2}$ e quindi la retta è esterna e la sua distanza da C è maggiore di $\sqrt{3}$.

Posizione tra piano e sfera. Circonferenza nello spazio. Sia π il piano di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ e sia S la sfera di equazione cartesiana (2.3). Per valutare la posizione di π rispetto a S bisogna calcolare la distanza di π da C. SI verificano i seguenti casi:

- $d(\pi, C) > r$: il piano è esterno a S;

- $d(\pi, C) = r$: il piano è tangente alla sfera in un suo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ed è il piano passante per P_0 e ortogonale al vettore $P_0 - C$ e quindi ha equazione

$$(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0.$$

Si noti che questa equazione si ottiene dall'equazione della sfera mediante la regola degli sdoppiamenti vista nel capitolo sulle coniche.

- $d(\pi, C) < r$: il piano interseca la sfera secondo una circonferenza Σ il cui centro C_Σ è l'intersezione di π con la retta ad esso perpendicolare passante per C. In formule, la circonferenza Σ è rappresentata dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^+ z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Trovare l'intersezione tra la sfera S di centro $C = (1, -1, 3)$ e raggio $r = 1$ e il piano π di equazione cartesiana $x + 1 = 0$.
Soluzione: troviamo subito che l'equazione cartesiana della sfera è

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 1.$$

Mettendo a sistema le due equazioni, osservando che dall'equazione del piano possiamo ricavare $x = -1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} &(-1 - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 - 1 = 0 \\ &4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 4 - 4z - 1 = 0 \\ &y^2 + z^2 + 2y - 4z + 3 = 0. \end{aligned}$$

2.2 Classificazione di quadriche

Esattamente come abbiamo fatto per le coniche, possiamo classificare una quadrica studiando le matrici

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Osservazione 49. Una quadrica è non degenere se e solo se $\det B \neq 0$.

Grazie alle matrici A e B possiamo classificare le quadriche.

Teorema 50. *(riduzione di una quadrica a forma canonica) Sia Γ una quadrica. Allora esiste una matrice $R \in SO(3)$ e un vettore (x_0, y_0, z_0) tale che il cambiamento di riferimento*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

trasforma Γ in una delle seguenti forme canoniche:

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 = \delta \tag{2.5}$$

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 = 2\delta z' \,, \tag{2.6}$$

dove α, β e γ sono gli autovalori della matrice simmetrica A e R ha come colonne gli autovettori normalizzati di A.

Grazie a questo teorema e al fatto che gli autovalori di un endomorfismo non dipendono dalla base scelta, possiamo classificare le quadriche in base alla forma canonica. Ossia, vale il seguente teorema:

Teorema 51. *Sia Γ una quadrica nella forma canonica $\boxed{\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 = \delta}$ e siano B e A le matrici a essa associate. Allora:*

- $\boxed{\text{rg } B = 4}$:

α	β	γ	δ	
$+$	$+$	$+$	$+$	*ellissoide reale*
$-$	$-$	$-$	$+$	*ellissoide immaginario*
$+$	$+$	$-$	$+$	*iperboloide a una falda (iperbolico)*
$+$	$-$	$+$	$+$	*iperboloide a una falda (iperbolico)*
$-$	$+$	$+$	$+$	*iperboloide a una falda (iperbolico)*
$+$	$-$	$-$	$+$	*iperboloide a due falde (ellittico)*
$-$	$-$	$+$	$+$	*iperboloide a due falde (ellittico)*
$-$	$+$	$-$	$+$	*iperboloide a due falde (ellittico)*

- $\boxed{\text{rg } B = 3}$:

α	β	γ	δ	
$+$	$+$	$-$	0	*cono*
$+$	$+$	0	$+$	*cilindro ellittico*
$-$	$-$	0	$+$	*cilindro immaginario*
$+$	$-$	0	$+$	*cilindro iperbolico*

- $\boxed{\text{rg } B = 2}$:

α	β	γ	δ	
$+$	$+$	0	0	*prodotto di due piani complessi coniugati*
$+$	$-$	0	0	*coppia di piani intersecantisi in una retta*
$+$	0	0	$+$	*coppia di piani paralleli*
$+$	0	0	$-$	*coppia di piani complessi senza intersezione*

- $\boxed{\text{rg } B = 1}$:

α	β	γ	δ	
	0	0	0	*piano contato due volte*

Teorema 52. *Sia Γ una quadrica nella forma canonica* $\boxed{\alpha x'^2 + \beta y'^2 = 2\delta z}$ *e siano B e A le matrici a essa associate. Allora:*

- $\boxed{rg\ B = 4}$:

α	β	δ	
$+$	$+$	$+$	*paraboloide ellittico*
$+$	$-$	$+$	*paraboloide iperbolico*

- $\boxed{rg\ B = 3}$:

α	β	δ	
	0		*cilindro parabolico*

- $\boxed{rg\ B = 2}$:

α	β	δ	
$+$	$+$	0	*due piani complessi coniugati*
$+$	$-$	0	*coppia di piani reali*

- $\boxed{rg\ B = 1}$:

α	β	δ	
	0	0	*piano contato due volte*

Osservazione 53. Gli iperboloidi e gli ellissoidi sono le uniche quadriche che possiedono un centro.

Ellissoide. Un'ellissoide Γ ha equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,.$$

ed è dotata di un unico centro, che è anche centro di simmetria. Se il centro è l'origine del riferimento $Oxyz$, gli assi coordinati sono gli assi di simmetria. Per verificarlo, basta considerare un punto $P = (x, y, z) \in \Gamma$ e notare che il simmetrico di P rispetto a O, ossia il punto $Q = (-x, -y, -z)$, sta ancora su Γ. In particolare, il simmetrico di P rispetto all'asse z, ossia il punto $P' = (-x, -y, z)$, appartiene ancora a Γ, il che significa che l'asse z è asse di simmetria. Allo stesso modo si verifica che gli assi x e y sono assi di simmetria. Si può verificare (con un ragionamento analogo) che anche i piani coordinati (ossia i piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) sono piani di simmetria.
Se intersechiamo il piano $z = h$ con l'ellissoide Γ otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}\ :$$

questa equazione rappresenta un'ellisse reale se $\frac{h^2}{c^2} < 1$, mentre se $\frac{h^2}{c^2} = 1$ si ha un punto reale (ossia l'intersezione tra due rette complesse coniugate). Se, invece, $\frac{h^2}{c^2} < 1$, abbiamo un'ellissoide immaginario.
Graficamente, un'ellissoide è compresa tra i piani $z = \pm h$, $x = \pm k$ e $y = \pm m$ e i numeri a, b, c sono i **semiassi** dell'ellissoide. Ecco una rappresentazione grafica:

Iperboloide a una falda. Un'iperboloide a una falda Γ ha equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

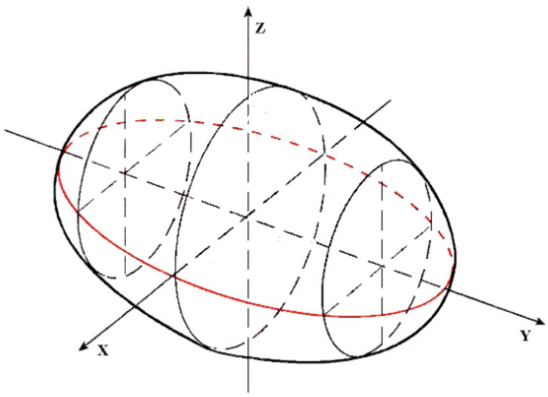


Figura 2.1: Ellissoide reale.

Ragionando come per l'ellissoide, si vede che i piani coordinati, gli assi coordinati e l'origine O sono elementi di simmetria di Γ. Intersecando Γ con i piani $z = h$, otteniamo ellissi che diventano sempre più grandi al crescere di $|h|$. Intersecando Γ con i piani $x = h$ e $y = h$ si ottengono invece delle iperboli.

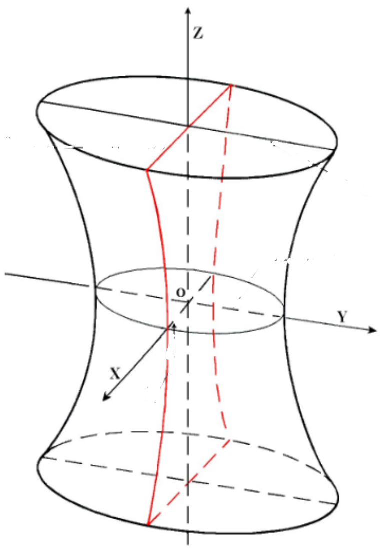


Figura 2.2: Iperboloide a una falda

Iperboloide a due falde. Un'iperboloide a due falde Γ ha equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Anche in questo caso troviamo gli stessi elementi di simmetria dei casi precedenti. Intersecando Γ con i piani $z = h$ e $y = h$, otteniamo iperboli con asse trasverso parallelo all'asse x. Il piano $x = h$ invece seziona Γ in un'ellisse se $\frac{h^2}{b} > 1$, in un punto reale se $h = \pm a$ e in punti non reali se $\frac{h^2}{a^2} < 1$. Il piano $x = 0$ (lo si provi) non interseca Γ, il che vuol dire che l'iperboloide si compone di due parti non connesse, simmetriche rispetto a questo piano.

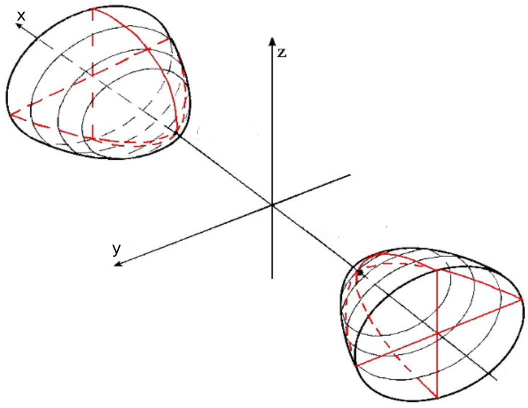


Figura 2.3: Iperboloide a due falde.

Paraboloide ellittico. L'equazione canonica di questa quadrica è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0 .$$

Non esiste un centro di simmetria e l'unico asse di simmetria è l'asse z. I piani di simmetria sono $x = 0$ e $y = 0$. Intersecando con i piani $y = h$ otteniamo parabole con asse parallelo all'asse z e vertice sulla parabola

$$\frac{x^2}{a^2} - 2z = 0 , \quad y = 0 .$$

Analogamente le intersezioni con i piani $x = h$ ci danno parabole con asse parallelo all'asse z e vertice sulla parabola

$$\frac{y^2}{b^2} - 2z = 0 , \quad x = 0 .$$

Le intersezioni con i piani $z = h > 0$ sono ellissi, mentre se $h < 0$ non si hanno intersezioni reali e se $h = 0$ si intersecano in un punto (vertice del paraboloide). Graficamente, quindi, il paraboloide ellittico sta tutto al di sopra del piano $z = 0$.

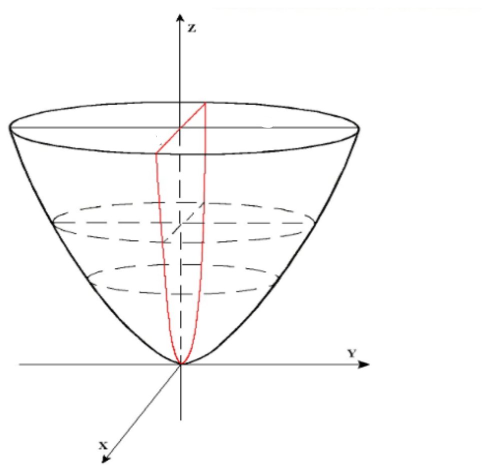


Figura 2.4: Paraboloide ellittico.

Paraboloide iperbolico. Ha equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0\,.$$

Le simmetrie coincidono con quelle del paraboloide ellittico. Intersecando con i piani $x = h$ e $y = h$ otteniamo parabole con asse parallelo all'asse z: le prime sono rivolte verso il basso e hanno il vertice sulla parabola

$$\frac{x^2}{a^2} - 2z = 0\,, \quad y = 0\,,$$

mentre le seconde sono rivolte verso l'alto e hanno il vertice sulla parabola

$$-\frac{y^2}{b^2} - 2z = 0\,, \quad x = 0\,.$$

Le intersezioni con i piani $z = h > 0$ sono iperboli con assi trasversi paralleli all'asse z se $h > 0$, all'asse y se $h < 0$, mentre se $h = 0$ l'iperbole è spezzata in due rette

$$(bx + ay)(bx - ay) = z = 0\,.$$

Graficamente ricorda la sella dei cavalli e le patatine Pringles.

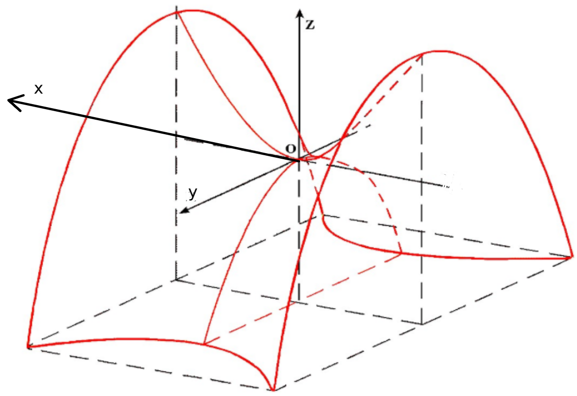


Figura 2.5: Paraboloide iperbolico.

Osservazione 54. Gli iperboloidi a una falda e i paraboloidi iperbolici contengono delle rette e per questo motivo vengono anche chiamate **quadriche rigate**. In altre parole, per ogni punto di una superficie rigata passano due rette interamente contenute nella superficie stessa. Prendiamo per esempio un'iperboloide a una falda e scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}\,.$$

Decomponendo entrambi i membri possiamo scrivere

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)\,.$$

Si vede che le rette

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = t\left(1 + \frac{y}{b}\right)\,, \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

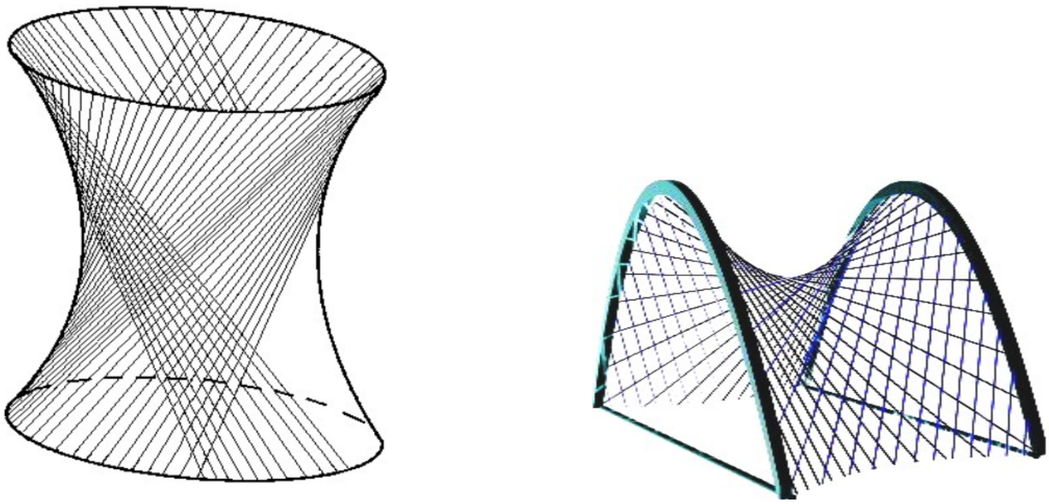


Figura 2.6: Quadriche rigate.

appartengono alla quadrica. Anche nel caso del paraboloide iperbolico di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

si vede che le due rette

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = t\,, \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \frac{2}{t}z$$

appartengono alla quadrica.

Cono e funzione omogenea. Iniziamo subito con la seguente

Definizione 55. Una funzione $f(x, y, z)$ si dice **omogenea** di grado k se si ha $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ per ogni scelta di t, x, y, z.

Sia C una curva nello spazio e V un punto non appartenente a C. Il cono Γ di vertice V e direttrice C è il luogo delle rette che uniscono V ad ogni punto di C. In altre parole, ogni punto $P \neq V$, $P \in \Gamma$, la retta VP è interamente contenuta in Γ. Le rette sono dette **generatrici** del cono e ogni curva (non solo C) che incontra tutte le generatrici viene chiamata **direttrice** del cono.

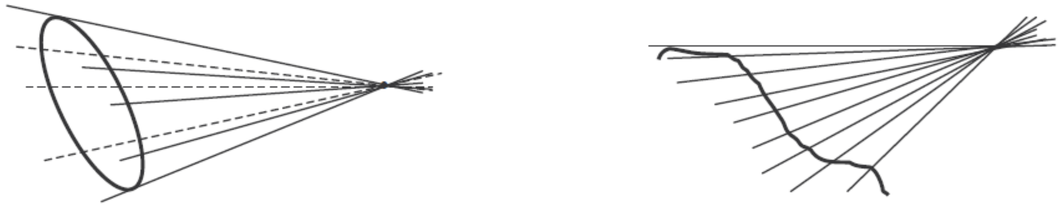


Figura 2.7: Cono con generatrici e direttrice.

Il cono è rappresentato da un'equazione omogenea di secondo grado in x, y, z, ossia da un'equazione del tipo

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = 0\,, \quad a, b, c \neq 0\,.$$

Tale cono ha vertice nell'origine. Inoltre, se prendiamo un punto $P = (x_0, y_0, z_0) \neq O$ sul cono (ossia $f(P) = 0$), la retta per O e per P ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases}$$

e sostituendo queste equazioni nell'equazione del cono si ha

$$\left(a x_0^2 + b y_0^2 + c z_0^2\right) t^2 = f(x_0, y_0, z_0) t^2 = 0\,,$$

che vuol dire che la retta è tutta contenuta nel cono.
Nel caso di un cono reale di vertice l'origine, gli assi e i piani coordinati sono assi e piani di simmetria. Le intersezioni con i piani $z = h$ sono ellissi crescenti al crescere di $|h|$. Se come sezioni otteniamo delle circonferenze si ha il **cono circolare retto**, il cui vertice sta sulla retta che passa per il centro della circonferenza e che è perpendicolare al piano della circonferenza.
Le intersezioni con i piani $x = h$ e $y = h$ sono delle iperboli.

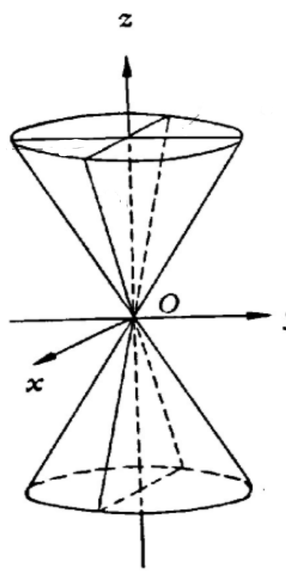


Figura 2.8: Cono con vertice nell'origine.

Osservazione 56. L'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ rappresenta il cono di vertice l'origine. Se tagliamo tale cono con piani del tipo $z = k$ otteniamo circonferenze, che sono le direttrici del cono. Viene chiamato **cono circolare retto**.

Cilindro. Fissato un vettore $\vec{v}$, una superficie S è un cilindro se è unione di rette parallele a $\vec{v}$. Queste rette si chiamano **generatrici** di S. Una curva continua $L \subset S$ che interseca ognuna delle generatrici viene chiamata **direttrice** di S.

Supponiamo che S abbia equazione $ax^2 + by^2 + c = 0$, ossia manca la variabile z. Preso un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ su S, ovviamente questo punto soddisfa l'equazione di S indipendentemente dal valore di z_0. Di conseguenza, ogni punto appartenente alla retta per P e parallela all'asse z soddisfa l'equazione. In altre parole, questa retta è contenuta nella superficie e quindi un'equazione del tipo $ax^2 + by^2 + c = 0$ rappresenta un cilindro

Figura 2.9: Cilindro con generatrici e direttrice.

con generatrici parallele all'asse z che incontrano nel piano $z = 0$ la curva di equazione $ax^2 + by^2 + c = z = 0$.
Preso il cilindro S di equazione (in forma canonica)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

allora S ha generatrici parallele all'asse z. Le intersezioni con i piani $z = h$ rappresentano delle ellissi. Da qui il nome **cilindro ellittico** (immaginario se il termine noto ha segno opposto rispetto ai coefficienti delle variabili).

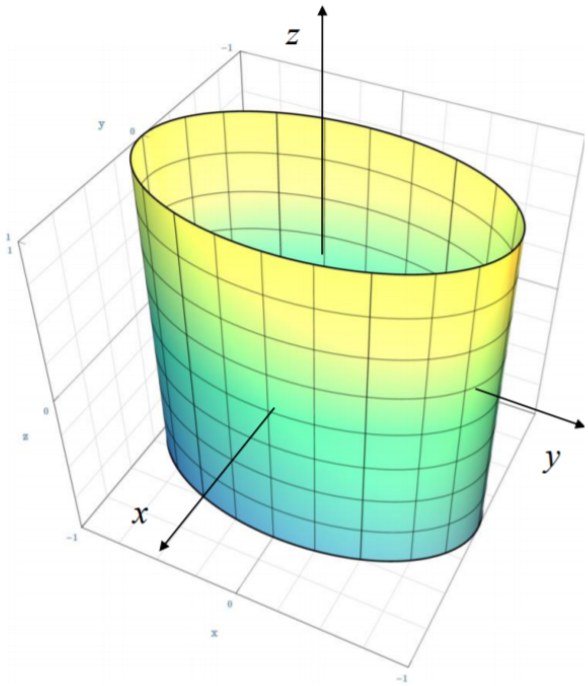


Figura 2.10: Cilindro ellittico.

Se consideriamo il cilindro S di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ si ottiene un **cilindro iperbolico** perchè intersecando S con i piani $z = h$ danno delle iperboli. Analogamente, intersecando il cilindro di equazione $\frac{x^2}{a^2} = 2y$ con i piani $z = h$ si ottengono delle parabole, da cui il nome **cilindro parabolico**.

Osservazione 57. L'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ nello spazio rappresenta un cilindro. Più precisamente, è l'unione di tutte le rette parallele all'asse z e che incontrano la circonferenza $\sigma: \; x^2 + y^2 - 1 = z = 0$. Infatti, se $P = (a, b, c)$ è un punto della superficie allora

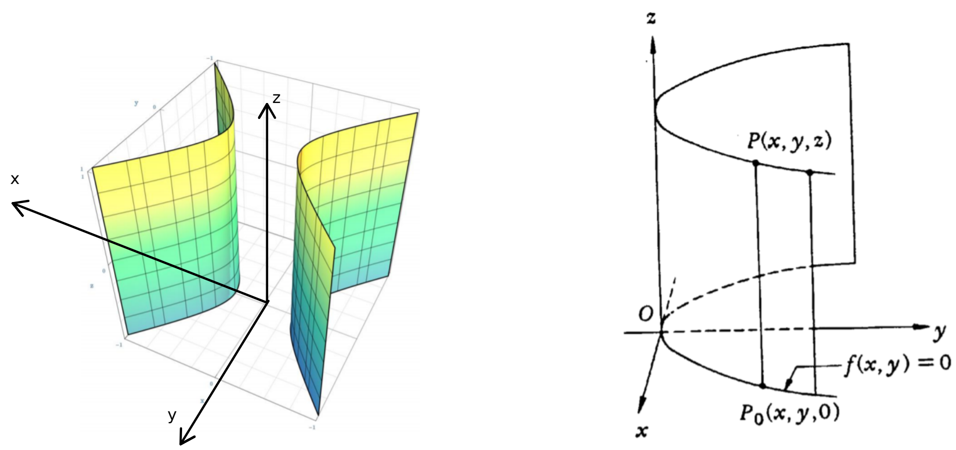


Figura 2.11: Cilindro iperbolico (a sinistra) e cilindro parabolico (a destra).

si ha $a^2 + b^2 = 1$ indipendente dal valore di c. Di conseguenza, l'intera retta passante per $Q = (a, b, c')$ e parallela all'asse z è contenuta nella superficie. Queste rette sono le generatrici del cilindro, mentre σ è una direttrice del cilindro. Tagliando il cilindro con un piano non parallelo all'asse z si ottiene una curva che interseca tutte le generatrici. Ad esempio, tagliando il cilindro con il piano $x + y = z$ si ottiene la curva L di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} z = x + y \\ x^2 + y^2 = 1 \,. \end{cases}$$

Sia ora r una retta parallela all'asse z che è contenuta nel cilindro e che quindi passa per P. Allora r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c + t \,. \end{cases}$$

Questa retta taglia il piano $z = x + y$ nel punto corrispondente al valore $t = a + b - c$, cioè nel punto $R = (a, b, a + b)$. La curva L è un esempio di direttrice, ma al variare di a, b, c si ottengono infinite direttrici.

Superfici di rotazione. Data una curva L e una retta r, la **superficie di rotazione** S che ha L come generatrice e r come asse è la superficie che si ottiene ruotando L intorno a r. Inoltre, le curve (circonferenze) che si ottengono intersecando S con i piani perpendicolari a r si chiamano **paralleli** della superficie, mentre le curve ottenute intersecando S con i semipiani che hanno r come asse si chiamano **meridiani**.

Passiamo in rassegna le principali quadriche di rotazione.

- **<u>Ellissoide di rotazione:</u>** consideriamo l'ellisse sul piano yz

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \\ x = 0 \end{cases}$$

  e facciamola ruotare attorno all'asse z: otteniamo l'equazione dell'ellissoide di rotazione

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \,.$$

Allo stesso modo si possono ricavare gli ellissoidi di rotazione attorno agli altri assi coordinati.

- **Iperboloide a una falda di rotazione:** consideriamo l'iperbole sul piano xz

$$\begin{cases} \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

e facciamola ruotare attorno all'asse z: otteniamo l'equazione dell'iperboloide a una falda di rotazione

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Allo stesso modo si possono ricavare gli iperboloidi a una falda di rotazione attorno agli altri assi coordinati.

- **Iperboloide a due falde di rotazione:** consideriamo l'iperbole sul piano xy

$$\begin{cases} \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

e facciamola ruotare attorno all'asse y: otteniamo l'equazione dell'iperboloide a due falde di rotazione

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1\,.$$

Allo stesso modo si possono ricavare gli iperboloidi a due falde di rotazione attorno agli altri assi coordinati.

- **Paraboloide di rotazione:** consideriamo la parabola sul piano xz

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 2z \\ y = 0 \end{cases}$$

e facciamola ruotare attorno all'asse z: otteniamo l'equazione del paraboloide di rotazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2z\,.$$

- **Cono circolare retto:** ha equazione $x^2 + y^2 = a^2z^2$ ed è generato dalla rotazione completa della retta passante per l'origine e per il punto di coordinate $(1, 0, 1)$ intorno all'asse z.

- **Cilindro rotondo:** ha equazione $x^2 + y^2 = a^2$ ed è generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a un suo lato.

Esempio 58. Ridurre a forma canonica la quadrica

$$2x^2 + y^2 - 2yz + z^2 - 4y + 3z + 1 = 0\,.$$

Soluzione: come si può verificare facilmente dal teorema di classificazione, si tratta di un paraboloide ellittico. Per determinare la forma canonica dobbiamo scrivere la matrice della rotazione e della traslazione.
Per la rotazione, come è noto dobbiamo cercare gli autovettori normalizzati della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono $\alpha = 2$ con molteplicità algebrica doppia e $\beta = 0$. Una base dell'autospazio V_2 è $\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$, mentre una base dell'autospazio V_0 è $\{(0,1,1)\}$. Dopo averli normalizzati li mettiamo in colonna a formare la matrice della rotazione:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Quindi abbiamo che le nuovo coordinate soddisfano la relazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

ossia

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z') \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y' + z')\,. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della quadrica troviamo

$$2x'^2 + 2y'^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 1 = 0\,.$$

Per trovare la traslazione completiamo i quadrati nell'equazione appena trovata:

$$\begin{aligned}
&2x'^2 + 2y'^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 1 = 0 \\
&2x'^2 + 2\left(y'^2 - \frac{7}{2\sqrt{2}}y'\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 1 = 0 \\
&2x'^2 + 2\left[\left(y' - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{49}{32}\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 1 = 0 \\
&2x'^2 + 2\left(y' - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z' - \frac{33}{16} = 0 \\
&2x'^2 + 2\left(y' - \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z' + \frac{33\sqrt{2}}{16}\right) = 0\,,
\end{aligned}$$

ossia effettuando il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x'' = x' = x \\ y'' = y' - \frac{7}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - z - \frac{7}{6}\right) \\ z'' = z' + \frac{33\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y + z + \frac{33}{8}\right) . \end{cases}$$

Il paraboloide ellittico in forma canonica allora diventa:

$$2x''^2 + 2y''^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} z'' .$$

Per esercizio, si trovi il centro originario della quadrica, ripercorrendo gli stessi passi fatti per le coniche nell'esercizio (40).

Esempio 59. Si determini l'equazione dell'ellissoide E che si ottiene riflettendo rispetto al piano $x + y + z = 0$ e poi traslando del vettore $v = (1, 0, -1)$ l'ellissoide rappresentato dall'equazione $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$. Esiste una retta r tale che E è invariante per rotazioni rispetto a r? Se sì, la si determini scrivendo le sue equazioni parametriche.
Soluzione: La prima cosa da fare è determinare la matrice della riflessione rispetto al piano $x + y + z = 0$. Preso $w = (x, y, z)$ abbiamo

$$\begin{aligned} r(w) &= (x, y, z) - \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right) . \end{aligned}$$

La matrice della riflessione allora è:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

Dobbiamo applicare anche la traslazione di vettore $v = (1, 0, -1)$, quindi le nuove coordinate sono

$$\begin{cases} x' = \frac{-x+2y+2z}{3} + 1 \\ y' = \frac{2x-y+2z}{3} \\ z' = \frac{2x+2y-z}{3} - 1 . \end{cases}$$

Per riflettere e traslare l'ellissoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ bisogna ricavare da questo sistema le variabili x, y, z. Considerando che la trasporta della matrice di riflessione trovata coincide con la matrice stessa, è semplice trovare

$$\begin{cases} x = \frac{-x'+2y'+2z'}{3} - 1 \\ y = \frac{2x'-y'+2z'}{3} \\ z = \frac{2x'+2y'-z'}{3} + 1\,. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione dell'ellissoide dato si ha:

$$13x'^2 + 13y'^2 + 10z'^2 + 8x'y' - 4x'z' - 4y'z' + 30x' + 12y' - 24z' + 18 = 0\,.$$

Per trovare r, basta applicare la simmetria trovata prima all'asse z (che è l'asse che rende invariante l'ellissoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$). La direzione di questa retta r è $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Esempio 60. Si scriva l'equazione di un iperboloide a due falde con asse di simmetria che forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ rispetto all'asse x.
Soluzione: consideriamo un'iperboloide a due falde:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1\,.$$

Consideriamo una rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno all'asse z in modo che anche l'asse x ruoti:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo, invertendo le relazioni:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}x'+y'}{2} \\ y = \frac{-x'+\sqrt{3}y'}{2} \\ z = z'\,. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione dell'iperboloide si ottiene

$$x'^2 - y'^2 + 4\sqrt{3}x'y' - 2z'^2 = 2\,.$$

Esempio 61. Si scriva l'equazione di un ellissoide di rotazione avente per asse di rotazione la retta $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = -2 \end{cases}$
Soluzione: consideriamo un ellissoide di rotazione attorno all'asse z, di equazione

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\,.$$

Per ricavare l'ellissoide richiesto basta applicare un'isometria lineare (non necessariamente una rotazione, basta una matrice ortogonale qualunque) e una traslazione che mandino l'asse z nella retta data.
La retta r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

e quindi la direzione è $(1,-1,1)$ con punto di passaggio in $(0,3,2)$. La matrice ortogonale A che porta l'asse z in r ha come terza colonna la direzione di r normalizzata, ossia il vettore $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (basta ricordarsi che abbiamo scelta l'ellissoide in forma canonica ottenuto per rotazione all'asse z, che è il terzo asse della base canonica). La matrice A deve avere tutte le colonne ortogonali affinchè sia ortogonale, quindi costruiamo una base di $\mathbb{R}^3$, comprendente il vettore appena normalizzato, che sia ortonormale. Questa base si trova facilmente perchè il sottospazio dei vettori ortogonali a v è dato dall'equazione $x-y+z=0$, che sono tutti i vettori del tipo $(t-s,t,s)$, una cui base è data da $(1,1,0)$ e $(-1,0,1)$. Partendo da questi due vettori, usiamo Gram-Schmidt per ortogonalizzarli:

$$w_1 = (1,1,0)\,, \quad w_2 = (-1,0,1) - \frac{(1,1,0)\cdot(-1,0,1)}{2}(1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

La matrice allora è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

La trasformazione diventa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^{T}A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x'+y'+2z'}{\sqrt{6}} \\ \frac{x'-y'+z'}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Eseguendo tale sostituzione nell'equazione dell'ellissoide otteniamo

$$4x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2 - 2x'y' + 2x'z' - 2y'z' = 3$$

che è l'equazione di un ellissoide di rotazione con asse avente direzione $(1,-1,1)$, ma passante per l'origine. Perchè l'asse di rotazione sia proprio la retta data basta traslare tutto per portare l'origine sul punto $(0,3,2)$ per cui passa la retta, ovvero applicare la traslazione $x'' = x', y'' = y'+3, z'' = z'+2$. Sostituendo nella (2.2) le relazioni inversa $x' = x'', y' = y''-3, z' = z''-2$ otteniamo

$$4x''^2 + 4y''^2 + 4z''^2 - 2x''y'' + 2x''z'' - 2y''z'' + 2x'' - 20y'' - 10z'' = -37$$

cioè l'ellissoide cercato.

2.3 Esercizi proposti

1. Determinare centro e raggio della sfera S di equazione $x^2+y^2+z^2-2y-6z+1=0$ e l'equazione del piano tangente a S nel punto $P_0 = (0,1,0)$.

   [$C = (0,1,3), r = 3, \pi : z = 0$]

2. Trovare centro e raggio della circonferenza intersezione della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 - x + z - 3 = 0$ con il piano $x - y - z + 2 = 0$.

   [$C = (-1/2, 1, 1/2), r = \sqrt{2}/2$]

3. Ridurre a forma canonica le seguenti quadriche:

   a) $x^2 - y^2 + z = 0$

   b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2yz - 2y = 0$

   c) $x^2 + (x + 2y)^2 + (z + 3x)^2 + 2x = 0$