Numeri complessi

È ben noto che non tutte le equazioni algebriche ammettono soluzioni reali. Ad esempio l'equazione $x^2 + 1 = 0$, ossia $x^2 = -1$, corrispondente all'estrazione della radice quadrata del numero negativo -1, non è risolubile in $\mathbb{R}$. Lo stesso accade per la generica equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ quando il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ è negativo. Per garantire l'esistenza di soluzioni di ogni equazione algebrica, l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ dotato delle operazioni di somma e prodotto può essere ampliato, introducendo il cosiddetto insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$. È così completata la sequenza degli insiemi numerici

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1 Rappresentazione algebrica

Definizione 1.1. L'insieme

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

è detto *insieme dei numeri complessi*. In particolare a è detta *parte reale* di z, mentre b è detta *parte immaginaria* di z

$$a = Re(z), \qquad b = Im(z).$$

Il numero complesso $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ è detto *unità immaginaria*.

Esempio 1.1. $2 + 3\,\mathrm{i}$, $\pi - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

I numeri complessi con parte immaginaria nulla ($b = 0$) sono numeri reali $z = a$. I numeri complessi con parte reale nulla ($a = 0$) sono detti numeri immaginari puri $z = \mathrm{i}b$.

Definiamo ora le operazioni di **somma** e **prodotto**. Per ogni $z = a + \mathrm{i}b$ e $w = c + \mathrm{i}d$ si ha

$$\begin{aligned} z + w &= (a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d) \\ z \cdot w &= (a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc) \end{aligned}$$

Esempio 1.2. Somma

$$(2 + 3\mathrm{i}) + (4 + 5\mathrm{i}) = (2 + 4) + (3 + 5)\mathrm{i} = 6 + 8\mathrm{i}$$

Esempio 1.3. Prodotto

$$(2+3\mathrm{i})\cdot(4+5\mathrm{i}) = 2\cdot 4 + 2\cdot 5\mathrm{i} + 3\mathrm{i}\cdot 4 + 3\mathrm{i}\cdot 5\mathrm{i} = 8 + 10\mathrm{i} + 12\mathrm{i} + 15\mathrm{i}^2$$
$$= 8 + 22\mathrm{i} - 15 = -7 + 22\mathrm{i}$$

Le operazioni di somma e prodotto così definite verificano le usuali proprietà verificate da somma e prodotto di numeri reali:

- **Proprietà della somma**:
  - è commutativa
    $$z + v = v + z, \quad \forall z, v \in \mathbb{C}$$
  - è associativa
    $$(z+v)+w = z+(v+w), \quad \forall z, v, w \in \mathbb{C}$$
  - l'elemento **neutro** è $0 = 0 + \mathrm{i}0$
    $$z + 0 = 0 + z = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
  - l'**opposto** è $-z = -a - \mathrm{i}b$
    $$z + (-z) = (-z) + z = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
- **Proprietà del prodotto**:
  - è commutativo
    $$z \cdot v = v \cdot z, \quad \forall z, v \in \mathbb{C}$$
  - è associativo
    $$(z \cdot v)\cdot w = z \cdot (v \cdot w), \quad \forall z, v, w \in \mathbb{C}$$
  - l'elemento **neutro** è $1 = 1 + \mathrm{i}0$
    $$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
  - l'**inverso** di $z \neq 0$ tale che $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$ è
    $$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2+b^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
  - è distributivo rispetto alla somma
    $$z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w, \quad \forall z, v, w \in \mathbb{C}$$

Esempio 1.4. L'opposto di $z = 2 + 3\mathrm{i}$ è $-z = -2 - 3\mathrm{i}$

Esempio 1.5. L'inverso di $z = 2 + 3\mathrm{i}$ è $z^{-1} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\mathrm{i}$

Esempio 1.6. L'inverso di $z = 2\mathrm{i}$ è $z^{-1} = -\frac{2}{4}\mathrm{i} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$

Osservazione 1.1. Un insieme numerico dotato delle due operazioni di somma e prodotto che verificano queste proprietà è detto *campo* (si denota con $\mathbb{K}$). Dal momento che per la maggior parte della nostra trattazione degli spazi vettoriali, che siano reali o complessi, useremo solo il fatto che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi, ovvero hanno le proprietà dette, non abbiamo nessun motivo nelle nostre dimostrazioni di distinguere tra il caso complesso e quello reale: possiamo tranquillamente parlare di *spazio vettoriale definito su un campo* $\mathbb{K}$ e dimostrare le nostre formule supponendo che gli scalari appartengano a $\mathbb{K}$, che potrebbe essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ senza che questo modifichi nulla rispetto alle dimostrazioni stesse.

Dato il numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$, definiamo il **coniugato** $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$. Per ogni $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ valgono le seguenti proprietà:

- $z + \overline{z} = 2a$
- $z - \overline{z} = 2b$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$

Esempio 1.7.

$$z = 3 + 2\mathrm{i},\ \overline{z} = 3 - 2\mathrm{i}$$

$$z = -5 - 4\mathrm{i},\ \overline{z} = -5 + 4\mathrm{i}$$

Esercizio 1.1. Scrivere nella forma $z = a + b\mathrm{i}$ il numero complesso

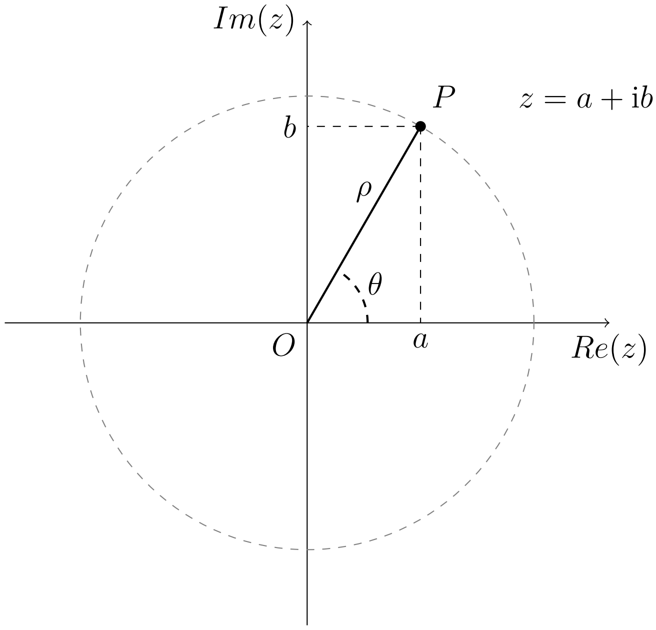
$$z = \frac{2}{\mathrm{i} - 1} - \frac{2}{1 + \mathrm{i}} - 2\mathrm{i}$$

Soluzione: $z = -2 - 2\mathrm{i}$

2 Rappresentazione geometrica

I numeri complessi, individuati da coppie di numeri reali (a, b), possono essere rappresentati con i punti di un piano, che prende il nome di *piano di Gauss.* Fissato un sistema di coordinate ortogonali, associamo al numero complesso $z = a + ib$ il punto P del piano di coordinate (a, b). La notazione $z = (a, b)$ è detta **rappresentazione cartesiana** del numero complesso z.

Notiamo che i numeri reali sono rappresentati dall'asse x (asse reale), mentre gli immaginari puri sono rappresentati dall'asse y (asse immaginario). Il punto che rappresenta il complesso coniugato $\overline{z}$ è il complementare rispetto all'asse x del punto che rappresenta z.



$$z = a + \mathrm{i}b = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$$

La distanza dall'origine del punto P che rappresenta z (indicata con ρ) prende il nome di **modulo** di z ed è uguale a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proprietà del modulo. Per ogni $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ valgono:

- $|z| \geq 0$;
- $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;
- $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Se $z \neq 0$, l'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ tra l'asse x e il segmento OP si chiama **argomento** di z

$$\theta = \mathrm{Arg}\ z.$$

Dai teoremi sui triangoli rettangoli[1,2], si hanno le relazioni

$$a = Re(z) = \rho \cos\theta, \qquad b = Im(z) = \rho \sin\theta,$$

da cui

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

che prende il nome di **rappresentazione trigonometrica** del numero complesso z.

Esempio 2.1. Scriviamo $z = 1 - \mathrm{i}$ nella forma trigonometrica

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

quindi $\theta = -\frac{\pi}{4}$ e

$$z = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

Usando la **formula di Eulero**[3] $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si può esprimere z anche nella **forma esponenziale**

$$z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Esempio 2.2. Scriviamo $z = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3}))$ nella forma esponenziale

$$z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Osservazione 2.1. Nel caso particolare in cui $\rho = 1$ e $\theta = \pi$, si ottiene l'*identità di Eulero*

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 0,$$

da molti considerata la formula più bella della matematica, infatti lega insieme, e lo fa in modo particolarmente elegante, i cinque numeri più importanti: $0, 1, \mathrm{i}, \pi$ ed e.

Il Teorema Fondamentale dell'Algebra stabilisce che ogni equazione di grado n ammette n soluzioni che possono essere reali distinte, reali coincidenti o complesse e coniugate.

Esercizio 2.1. Trovare le soluzioni dell'equazione $z^2 + z + 1 = 0$.

Esercizio 2.2. Trovare le soluzioni dell'equazione $z^3 + 2z^2 + 5z = 0$.

[1] In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è data dal prodotto tra la misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto.

[2] In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è data dal prodotto tra la misura dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente.

[3] La formula di Eulero si può dimostrare usando lo sviluppo in serie delle funzioni seno, coseno ed esponenziale (Analisi Matematica 2).