Esercizi di preparazione alla prova scritta di Geometria e Algebra
maggio 2022

La prova scritta dura 3 ore ed è costituita da una domanda di teoria in cui possono essere chieste alcune definizioni o enunciati dei principali teoremi (come per esempio domande 1 e 2), seguita da quattro esercizi della tipologia riportata di seguito. Possono sostenere l'esame gli studenti regolarmente iscritti all'appello e muniti di un documento di identità valido. Non sono ammessi appunti, libri, dispense. È consentito l'uso di una calcolatrice scientifica non programmabile, non grafica, senza possibilità di connessione wireless/bluetooth.

1. Si diano le seguenti definizioni:

- vettori linearmente indipendenti;
- nucleo di un'applicazione lineare f;
- autovettore di un endomorfismo f.

Soluzione.

- Dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ in uno spazio vettoriale V si dicono linearmente indipendenti se nessuno di loro può essere scritto come combinazione lineare dei rimanenti, o equivalentemente se l'unica combinazione lineare nulla $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$ è quella con coefficienti $c_1, \ldots, c_n$ tutti uguali a zero.
- È detto nucleo di un'applicazione lineare $f : V \to V$ la controimmagine del vettore nullo $N(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$, ovvero è il sottospazio di V costituito da tutti i vettori che hanno come immagine il vettore nullo 0.
- Un autovettore di un endomorfismo $f : V \to V$ è un vettore v non nullo tale che $f(v) = \lambda v$, per un certo scalare λ, detto autovalore associato a v.

2. Si dica quando un'applicazione lineare è suriettiva e quando è iniettiva. Inoltre si enunci il teorema della dimensione (o teorema di nullità più rango).

Soluzione.

- Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è suriettiva se e solo se $Im(f) = W$, o equivalentemente $\dim(Im(f)) = \dim(W)$.
- Un'applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $N(f) = \{0\}$, o equivalentemente $\dim(N(f)) = 0$.
- Teorema: Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, con $\dim(V)$ finita. Allora $\dim(N(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V)$.

3. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + kx_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ kx_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$$

Soluzione.

$$k = 2,\ \infty^2 \text{ soluzioni },\ \mathbf{x} = [-2-2s+t, 1-3t, s, t]^T,\ s, t \in \mathbb{R}$$

$$k \neq 2,\ \infty^1 \text{ soluzioni },\ \mathbf{x} = [3t, 1-(1+k)t, -1-t, t]^T,\ t \in \mathbb{R}$$

4. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = k \\ (2-k)x_1 + x_2 - x_3 = k \\ (3-k)x_1 + (k+1)x_2 - 2x_3 = 2k \end{cases}$$

Soluzione.

$$k = 1,\ \infty^2 \text{ soluzioni },\ \mathbf{x} = [1-t+s, t, s]^T,\ s, t \in \mathbb{R}$$

$$k \neq 1,\ \infty^1 \text{ soluzioni },\ \mathbf{x} = [-t, t, -k+(k-1)t]^T,\ t \in \mathbb{R}$$

5. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 = -k \\ 6x_1 + 3x_2 = -3 \end{cases}$$

Soluzione.

$$k \neq 2, \quad \text{il sistema è incompatibile}$$

$$k = 2,\ \infty^1 \text{ soluzioni },\ \mathbf{x} = [-1/2 - t/2, t]^T,\ t \in \mathbb{R}$$

6. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$f :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Determinare il nucleo di f, una sua base e specificare la $\dim(N(f))$. Determinare l'immagine di f, una sua base e specificare la $\dim(Im(f))$. Si dica se f è un'applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi.

Soluzione.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(f)=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-t\\t\\t\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\},\quad B_{N(f)}=\left\{[-1,1,1]^T\right\},\quad \dim(N(f))=1$$

$$Im(f)=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^4\ :\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2-x_3\\x_1+x_3\\2x_1+x_2+x_3\end{bmatrix},\ x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\},\quad \dim(Im(f))=2$$

$$B_{Im(f)}=\left\{[1,0,1,2]^T,[1,1,0,1]^T\right\}$$

L'applicazione lineare non è né suriettiva né iniettiva.

7. Si dica per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ l'applicazione lineare

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad f([x_1,x_2,x_3]^T)=[x_1+x_2,2x_1+x_2+kx_3,x_1+2x_2-x_3]^T$$

è iniettiva, suriettiva o biettiva. Per i valori per cui non è iniettiva o suriettiva se ne determinino nucleo e immagine. Infine, fissato $k=2$, si determini l'inversa di f.

Soluzione. Se $k\neq 1$ l'applicazione lineare è iniettiva e suriettiva, quindi anche biettiva. Se $k=1$ non è né suriettiva né iniettiva.

$$N(f)=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-t\\t\\t\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\},$$

$$Im(f)=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\2x_1+x_2+x_3\\x_1+2x_2-x_3\end{bmatrix},\ x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$\begin{aligned}f^{-1}:\ &\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3\\ &\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}5x_1-x_2+-2x_3\\-4x_1+x_2+2x_3\\-3x_1+x_2+x_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

8. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$f([x_1,x_2,x_3]^T)=[2x_1-2x_2,x_1+x_2+x_3,-2x_1+2x_2]^T$$

Si determinino nucleo, autovalori e autovettori di f e si dica se f è iniettivo, suriettivo o biettivo.

Soluzione.

$$N(f)=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}t\\t\\-2t\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\},$$

L'endomorfismo non è né iniettivo né suriettivo.
Autovalori e autovettori

$$\lambda_1 = 2, \quad V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_2 = 0, \quad V_0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t/2 \\ -t/2 \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_3 = 1, \quad V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ -t/2 \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

9. Sia dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + kx_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

è invertibile, determinandone l'inversa. Per i valori di k per cui non è invertibile, si determini una base del nucleo $N(f)$.

Soluzione. L'applicazione è invertibile se $k \neq 3$.

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \frac{3}{2(3-k)}x_1 + \frac{6-k}{2(3-k)}x_2 + \frac{-k-3}{2(3-k)}x_3 \\ \frac{1}{2(3-k)}x_1 + \frac{k-2}{2(3-k)}x_2 + \frac{1-k}{2(3-k)}x_3 \\ \frac{1}{k-3}x_1 + \frac{1}{k-3}x_2 + \frac{2}{3-k}x_3 \end{bmatrix}$$

$$N(f) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -9t/2 \\ t/2 \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}, \quad B_{N(f)} = \left\{ [-9/2, 1/2, 1]^T \right\}.$$

10. Date le due applicazioni lineari

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3]^T$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad g([x_1, x_2]^T) = [x_1 - x_2, 3x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2]^T$$

si scriva la composizione $g \circ f$, si trovi una base per il nucleo di $g \circ f$ e si dica qual è la dimensione del sottospazio $Im(g \circ f)$.

Soluzione.

$$
\begin{aligned}
g \circ f :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
N(g \circ f) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ :\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3t \\ -4t \\ t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad B_{N(g \circ f)} = \left\{ [3, -4, 1]^T \right\},
$$

$\dim(Im(g \circ f)) = 2$.

11. Data la matrice

$$
A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una matrice M tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

Soluzione.

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -3/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Autovalori e autovettori

$$
\lambda_1 = -1, \quad V_{-1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ :\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t \\ s \end{bmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}
$$

$$
\lambda_2 = 2, \quad V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ :\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}
$$

La matrice A non è diagonalizzabile, in quanto $m_{geo}(\lambda_2) < m_{alg}(\lambda_2)$.

12. Data la matrice

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}
$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = 1, \quad V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s - t/2 \\ s \\ t \end{bmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_2 = 2, \quad V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Base di autovettori

$$\left\{ [1,1,0]^T, [-1/2, 0, 1]^T, [1,1,1]^T \right\}.$$

13. Mediante il procedimento di Gram-Schmidt, si trovi una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = [1,1,1,1]^T, \qquad \mathbf{v}_2 = [1,1,0,0]^T, \qquad \mathbf{v}_3 = [2,0,0,0]^T.$$

Soluzione.

$$\mathbf{u}_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^T, \qquad \mathbf{u}_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]^T, \qquad \mathbf{u}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^T.$$

14. Dati i tre vettori

$$\mathbf{u} = [0,1,3]^T, \qquad \mathbf{v} = [-1,2,-4]^T, \qquad \mathbf{w} = [1,-3,1]^T,$$

verificare se sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti. Calcolare la norma dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Dire se tra di loro ci sono vettori ortogonali. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1/2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

calcolare il prodotto $A\mathbf{u}$.
Per quali valori del parametro reale λ, il vettore $\mathbf{s} = [-2, \lambda, 4]^T$ è ortogonale a $\mathbf{u}$?
Calcolare la norma del vettore complesso $\mathbf{z} = [4 - i, -3 + 2i, 3]^T$.

Soluzione. I tre vettori sono lin. dipendenti. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{10}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{21}$, $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{11}$. I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali. $A\mathbf{u} = [-3, 2, 2]^T$. $\lambda = -12$. $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{39}$.

15. Si scrivano l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza centrata nel punto $C = (1, 2)$ e di raggio $r = 4$. Si dica se la retta di equazione cartesiana $x - y + 5 = 0$ interseca la circonferenza in un punto, in due punti oppure in nessun punto e determinare gli eventuali punti di intersezione.

Soluzione.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16 \qquad \text{eq. cartesiana}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 4\cos\theta \\ y = 2 + 4\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad \text{eq. parametrica}$$

La retta interseca la circonferenza in due punti $P = (1, 6)$ e $Q = (-3, 2)$.

16. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si considerino la sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + z + 5 = 0$$

ed il piano π di equazione $x + z = 0$. Determinare le coordinate del centro C ed il raggio r della sfera (suggerimento: completare i quadrati in modo da ottenere $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$). Calcolare la distanza del punto C dal piano. Calcolare la distanza tra il punto $P = (1/2, -4, 3/2)$ ed il punto C.

Soluzione.

$$C = \left(1, -2, -\frac{1}{2}\right), \qquad r = \frac{1}{2}, \qquad d(C,\pi) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad d(P,C) = \frac{\sqrt{33}}{2}$$