Chapter 1

Due integrazioni sul determinante

1.1 Complanarità di rette in parametriche

Siano r e r' due rette, date in equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} , \quad r' : \begin{cases} x = x_0' + a't \\ y = y_0' + b't \\ z = z_0' + c't \end{cases} \tag{1.1}$$

Allora r e r' sono complanari se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} x_0 - x_0' & y_0 - y_0' & z_0 - z_0' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0 \tag{1.2}$$

Infatti, come sappiamo, due rette sono complanari solo se sono o parallele o incidenti in un punto: nel caso in cui esse siano parallele, i loro vettori direttori $v = (a, b, c)$ e $v' = (a', b', c')$ (che si vedono dai coefficieni di t nelle parametriche) sono proporzionali, e quindi il determinante (1.2) è zero perché la seconda e la terza riga della matrice sono proporzionali e quindi dipendenti (e il determinante di una matrice con le righe dipendenti, come sappiamo, si annulla). Nel caso in cui le rette siano incidenti in un punto, invece, dal momento che le parametriche di una retta ci danno i punti della retta al variare del parametro, esisteranno un valore di t da sostituire nella prima delle (1.1) e un valore di t' da sostituire nella seconda delle (1.1) per i quali si ottiene lo stesso punto (quello in comune alle due rette), ovvero per tali valori si ha

$$
\begin{cases}
x_0 + at = x'_0 + a't' \\
y_0 + bt = y'_0 + b't' \\
z_0 + ct = z'_0 + c't'
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

Possiamo riscrivere queste uguaglianze come

$$
\begin{cases}
x_0 - x'_0 = -at + a't' \\
y_0 - y'_0 = -bt + b't' \\
z_0 - z'_0 = -ct + c't'
\end{cases}
$$

ovvero accorparle nella forma vettoriale

$$
(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0, z_0 - z'_0) = -t(a, b, c) + t'(a', b', c') \tag{1.4}
$$

Questa uguaglianza ci sta allora dicendo che, nella matrice che compare nella (1.2), la prima riga è combinazione lineare delle altre due: di nuovo, il determinante è allora zero in quanto il determinante di una matrice con le righe dipendenti è nullo.

Questo conclude la dimostrazione del fatto che se le rette sono complanari allora vale la (1.2). Viceversa, se il determinante si annulla allora i casi sono due: o la seconda e la terza riga (a, b, c) e (a', b', c') sono proporzionali (e le rette sono parallele, essendo tali righe i vettori direttori delle rette) oppure se queste non sono proporzionali, essendo il determinante nullo e quindi le righe dipendenti necessariamente la prima riga $(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0, z_0 - z'_0)$ deve essere combinazione lineare di (a, b, c) e (a', b', c'): questo, ripetendo a ritroso i passaggi fatti per passare dalla (1.4) alla (1.3) mostra che le rette devono avere un punto in comune.

1.2 Regola di Sarrus

La regola di Sarrus è un metodo, alternativo allo sviluppo di Laplace, per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine 3

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{pmatrix}. \tag{1.5}
$$

La regola di Sarrus funziona come segue: aggiungiamo alla matrice data due colonne ripetendo, dopo la terza, la sua prima e la sua seconda colonna:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{pmatrix}. \tag{1.6}
$$

In questa matrice con cinque colonne possiamo mettere in evidenza tre "diagonali"

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \mathbf{a_{31}} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \mathbf{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & \mathbf{a_{32}} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

e tre "antidiagonali"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mathbf{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & \mathbf{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \mathbf{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Il determinante della matrice risulta essere allora uguale al prodotto degli elementi della prima diagonale più il prodotto degli elementi della seconda diagonale più il prodotto degli elementi della terza diagonale, meno il prodotto degli elementi della prima antidiagonale meno il prodotto degli elementi della seconda antidiagonale meno il prodotto degli elementi della terza antidiagonale:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Infatti, si potrebbe verificare che gli addendi di questa uguaglianza coincidono con quelli previsti dalla definizione di determinante mediante sommatoria e permutazioni (la regola di Sarrus dà quindi semplicemente un modo pratico di ottenere quegli stessi addendi, con i segni corretti, senza ricorrere alla definizione).

Sottolineiamo il fatto che la regola di Sarrus non può essere applicata a matrici di ordine superiore a 3.