Matrici

Indice

1 Introduzione

Definizione 1.1. Una **matrice** A ad elementi reali è una tabella di numeri reali, detti le sue *entrate*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

scritti su righe e colonne; se la matrice ha m righe ed n colonne, si dice che A ha dimensione $m \times n$ oppure che è di tipo $m \times n$ o che appartiene a $\mathbb{R}^{m\times n}$. Se la matrice è ad elementi complessi, diremo che A appartiene a $\mathbb{C}^{m\times n}$.

Indichiamo gli elementi della matrice con a_{ij} oppure $(A)_{ij}$ usando due indici in basso, dove i è l'*indice di riga* (ci dice in quale riga si trova e va da 1 a m) e j è l'*indice di colonna* (ci dice in quale colonna si trova e va da 1 a n). Si dice anche che a_{ij} è l'entrata di posto ij.

Esempio 1.1. Matrice con 3 righe e 4 colonne

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & \pi & 0 \\ 10 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & \sqrt{2} & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

Definizione 1.2. Si dice **trasposta** della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matrice che si indica con $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ che si ottiene da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Esempio 1.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Definizione 1.3. Una **sottomatrice** $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ è una matrice i cui elementi appartengono a p righe e q colonne di A.

Esempio 1.3.

$$\begin{bmatrix} 6 & \pi & 0 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è una sottomatrice della matrice dell'Esempio1.1 scegliendo prima e seconda riga e prima, terza e quarta colonna.

Osservazione 1.1. I vettori costituiti da n componenti sono matrici di tipo $n \times 1$.

Definizione 1.4. Una matrice di tipo $n \times n$ si dice **quadrata** ed il numero n prende il nome di *ordine* della matrice. Gli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ costituiscono la *diagonale principale* della matrice.

Una sottomatrice quadrata di $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ si dice **minore estratto da** A. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è quadrata, il **minore complementare** dell'elemento a_{ij} di A è il minore di ordine $n-1$ che si ottiene cancellando da A la riga e la colonna a cui appartiene a_{ij} (cancellando riga i e colonna j).

Nell'ambito delle **matrici quadrate**, hanno particolare importanza i seguenti tipi di matrice:

- *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$, cioè $A = A^T$;

  Esempio 1.4.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & -12 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$, cioè $A = -A^T$; si noti che gli elementi della diagonale principale devono essere nulli, perché deve valere $a_{ii} = -a_{ii}$ ma se un numero reale è uguale al suo opposto deve essere per forza 0;

  Esempio 1.5.
$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & -2 \\ -7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *triangolare superiore* se $a_{ij} = 0$ per $i > j$;

  Esempio 1.6.
$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$$

- *triangolare inferiore* se $a_{ij} = 0$ per $i < j$;

  Esempio 1.7.
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 0 \\ 12 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

- *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$.

  Esempio 1.8.
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

  In particolare, se gli elementi diagonali sono uguali a 1, tale matrice si chiama **matrice identità** e si indica col simbolo I (o I_n se si vuole evidenziare il suo ordine)
$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione 1.5. La **traccia** di una matrice quadrata A è il numero dato dalla somma degli elementi sulla diagonale

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Esempio 1.9. La traccia della matrice dell'Esempio 1.4 è $\mathrm{tr}(A) = 3 - 2 - 12 + 6 = -5$.

Ora consideriamo una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definizione 1.6. Una matrice si dice **a gradini** se andando dalla prima riga all'ultima, il primo elemento non nullo di ogni riga compare con un indice di colonna sempre più grande. Il primo elemento non nullo di ogni riga è chiamato *pivot*.

Esempio 1.10.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

è una matrice a gradini. I suoi pivot sono 7 nella prima riga, 4 nella seconda, 6 nella terza, e si trovano, nell'ordine, sulla prima, seconda e quarta colonna (indice di colonna sempre più grande).

Esempio 1.11.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

non è a gradini. Il primo elemento non nullo della terza riga sta nella stessa colonna del primo elemento non nullo della seconda riga.

Esempio 1.12.

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

non è a gradini. Il primo elemento non nullo della terza riga sta in una colonna di indice più piccolo del primo elemento non nullo della seconda riga.

Esempio 1.13. Altri esempi di matrici a gradini sono le matrici diagonali e le matrici triangolari superiori con gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero.

2 Operazioni tra matrici

2.1 Somma di matrici

Siano A e B due matrici dello stesso tipo $m \times n$. Gli elementi della matrice $A+B$, detta **somma** di A e B, si ottengono sommando elementi aventi lo stesso posto in A e B, cioè

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esempio 2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 7/10 & -1 & 1/4 \\ 0 & 3 & 1/2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 3/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7/10 & -1/2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Proprietà: siano $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, valgono le seguenti

1. $A + B = B + A$ (proprietà commutativa)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (proprietà associativa)
3. La matrice nulla O (formata da tutti zeri) è tale che $A + O = O + A = A$
4. La matrice $-A$ (opposta di A) i cui elementi sono gli opposti dei relativi elementi di A è tale che $A + (-A) = O$

La **differenza** tra matrici dello stesso tipo è definita da

$$A - B = A + (-B)$$

2.2 Prodotto di uno scalare per una matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Il **prodotto** di λ per A è la matrice λA i cui elementi sono ottenuti moltiplicando per λ i corrispondenti elementi di A, cioè

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esempio 2.2.

$$3 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 12 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Proprietà: siano $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
4. $1A = A$

Osservazione 2.1. L'insieme delle matrici di tipo $m\times n$ dotato delle operazioni di somma di matrici e prodotto di uno scalare per una matrice è uno spazio vettoriale.

2.3 Prodotto di matrici (righe per colonne)

Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ (il numero di colonne in A coincide con il numero di righe in B). Il **prodotto** delle matrici A e B è la matrice

$$AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

il cui elemento generico è dato da

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p \tag{1}$$

cioè la matrice prodotto ha numero di righe pari a quello della matrice di sinistra e numero di colonne pari a quello della matrice di destra e il suo generico elemento è la somma dei prodotti degli elementi della riga di posto i nella matrice A per i corrispondenti elementi della colonna di posto j nella matrice B.

Vediamo come diventa la formula (1) se $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ e $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, cioè scriviamo gli elementi della matrice prodotto:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{aligned}$$

Esempio 2.3. Prodotto tra una matrice A di tipo 3×2 e una B di tipo 2×2

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 - 1\cdot 4 & 1\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 4 & 2\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1/2\cdot 4 & 0\cdot 0 + 1/2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 16 & 3 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La matrice prodotto è di tipo 3×2.

Osservazione 2.2. Se ha senso calcolare AB, in generale non può avere senso calcolare BA. Nell'Esempio 2.3 non ha senso calcolare BA.

Osservazione 2.3. Anche se entrambi i prodotti si possono eseguire, come avviene ad esempio se A e B sono quadrate dello stesso ordine, in generale

$$AB \neq BA$$

cioè il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa.

Esempio 2.4.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 11/2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che se $AB = BA$, qualunque sia la matrice A di ordine n, allora $B = \lambda I_n$.

Proprietà: purché le operazioni indicate abbiano senso (in base alle dimensioni delle matrici), valgono le seguenti

1. $A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$

2. $A(BC) = (AB)C$

3. $A(\lambda B) = \lambda(AB), \quad (\lambda A)B = \lambda(AB)$

Osservazione 2.4. Nel prodotto tra matrici non vale la *legge di annullamento del prodotto*[1]. Quindi si può ottenere la matrice nulla $AB = O$ anche se A e B non sono matrici nulle. Per esempio

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osservazione 2.5. Se la matrice A è quadrata, ha senso scrivere $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, $\ldots$, $A^p = AA \cdots A$, detta *potenza p-esima* della matrice A.
Inoltre se I_n è la matrice identità di ordine n, vale $AI_n = I_nA = A$.

Proposizione 2.1. *Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Allora vale*

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Dimostrazione.

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$$

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}$$

e le due espressioni sono uguali perché il prodotto di due scalari è commutativo. □

3 Il determinante

Data una matrice quadrata di ordine n a entrate in un campo $\mathbb{K}$ (che può essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ad essa si associa un numero appartenente a $\mathbb{K}$, detto **determinante** della matrice, che è funzione delle sue entrate

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Se la matrice ha ordine $n \leq 3$, il suo determinante è così definito:

- per $n = 1$, $\det(A)$ coincide con l'unico elemento della matrice;

[1] Se due numeri reali a e b danno prodotto zero $ab = 0$, allora almeno uno dei fattori è zero.

- per $n = 2$, si pone
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
- per $n = 3$, si pone
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

Per estendere la definizione di determinante al caso n generale, è necessaria una premessa sulle permutazioni.

3.1 Permutazioni

Dato l'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ dei numeri naturali compresi tra 1 e n, una funzione da questo insieme in se stesso associa ad ogni elemento di $\{1, 2, \ldots, n\}$ un'immagine, scelta sempre all'interno di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se le immagini sono tutte diverse senza ripetizioni, queste saranno ancora tutti gli elementi $1, 2, \ldots, n$ semplicemente disposti in un altro ordine, ovvero permutati. Si parla allora di **permutazione di n elementi**.

Esempio 3.1. Le seguenti rappresentano permutazioni di 4 elementi:

$$\begin{array}{ccc} 1 \mapsto 1 & \qquad & 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 3 & & 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 2 & & 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 4 & & 4 \mapsto 1 \end{array}$$

L'insieme delle permutazioni di n elementi si denota S_n. Per ogni n, tale insieme contiene esattamente $n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ (cioè n fattoriale) permutazioni: ad esempio, per $n = 2$ abbiamo $2! = 2 \cdot 1 = 2$ permutazioni possibili, ovvero

$$\begin{array}{ccc} 1 \mapsto 1 & \qquad & 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 2 & & 2 \mapsto 1 \end{array}$$

Tra le permutazioni, vi è sempre anche quella che associa a ogni elemento se stesso, detta *permutazione identica*.

Per $n = 3$ abbiamo invece $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutazioni possibili, ovvero

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 2$	$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 3$	$1 \mapsto 2$	$1 \mapsto 3$
$2 \mapsto 2$	$2 \mapsto 1$	$2 \mapsto 3$	$2 \mapsto 2$	$2 \mapsto 3$	$2 \mapsto 1$
$3 \mapsto 3$	$3 \mapsto 3$	$3 \mapsto 2$	$3 \mapsto 1$	$3 \mapsto 1$	$3 \mapsto 2$

Si noti che p_2, p_3 e p_4 scambiano tra loro due elementi lasciando fisso il terzo (p_2 scambia tra loro 1 e 2, p_3 scambia tra loro 2 e 3, p_4 scambia tra loro 1 e 3): in generale, una permutazione di questo tipo, che scambia tra loro due elementi lasciando fissi tutti gli altri si dice **trasposizione**. Ad esempio, è una trasposizione anche la prima permutazione di 4 elementi presentata nell'Esempio 3.1 (scambia tra loro 2 e 3 lasciando fissi 1 e 4), mentre la seconda non lo è. Benché non tutte le permutazioni siano trasposizioni, qualunque permutazione può essere ottenuta come composizione di trasposizioni, ovvero può essere realizzata eseguendo una sequenza di trasposizioni. Ad esempio, la permutazione p_5 di sopra, che non è una trasposizione, può tuttavia essere ottenuta scambiando prima 1 e 2, e poi 1 e 3, cioè componendo 2 trasposizioni:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 2 \mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 1 \mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 3 \mapsto 1 \end{aligned}$$

In generale, se il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione p è pari, si dice che p è una **permutazione pari**; se invece il numero di trasposizioni che servono per ottenere p è dispari, si dice che p è una **permutazione dispari**. Ad esempio, p_5 è una permutazione pari, in quanto l'abbiamo ottenuta componendo 2 trasposizioni.

Osservazione 3.1. Se una permutazione è già essa una trasposizione, allora essa è dispari (1 è un numero dispari).

Osservazione 3.2. Possono esserci più modi diversi di decomporre una permutazione come composizione di trasposizioni, ad esempio, la permutazione identica può essere vista o come risultato di 0 trasposizioni, oppure come risultato di 2 trasposizioni

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 2 \mapsto 1 \\ 2 &\mapsto 1 \mapsto 2 \\ 3 &\mapsto 3 \mapsto 3 \end{aligned}$$

Tuttavia, si può dimostrare che il numero di trasposizioni che servono per ottenere una permutazione data è o sempre pari o sempre dispari (nell'esempio, 0 o 2, comunque pari).

Si può allora definire il **segno** $s(p)$ di una permutazione p come

- $s(p) = +1$ se p è una permutazione pari;
- $s(p) = -1$ se p è una permutazione dispari.

3.2 Definizione di determinante

Definizione 3.1. Sia A una matrice quadrata di ordine n con entrate a_{ij}. Il determinante è definito da

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} s(p)\ a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} \tag{2}$$

Il determinante è dato da una sommatoria che ha un addendo per ogni permutazione $p \in S_n$: ognuno di questi addendi è un prodotto di entrate di A del tipo $a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$, con davanti un segno $+$ o $-$ a seconda che la permutazione p sia pari o dispari. Si noti che l'espressione $a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$ è il prodotto di n entrate scelte nella matrice, una per ogni riga, con gli indici di colonna dati da $p(1), p(2), \ldots, p(n)$: poiché una permutazione scambia gli indici $1, 2, \ldots, n$ senza ripetizioni, stiamo praticamente scegliendo un'entrata da ogni riga in modo però che le entrate scelte stiano anche su colonne diverse.

Per chiarire la definizione, consideriamo i casi $n = 2$ e $n = 3$.

Sia $n = 2$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Dell'insieme $\{1, 2\}$ ci sono 2 permutazioni (l'identità e la trasposizione che scambia 1 con 2) quindi nella sommatoria (2) avremo solo due addendi, del tipo $s(p)\ a_{1p(1)}a_{2p(2)}$:

- se p è l'identità (permutazione pari) si ha $s(p) = +1$, l'addendo corrispondente sarà $+a_{11}a_{22}$;
- se p è la trasposizione che scambia 1 con 2 (permutazione dispari), si ha $s(p) = -1$ e l'addendo corrispondente sarà $-a_{12}a_{21}$.

Quindi il determinante risulta essere $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Sia $n = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Le permutazioni dell'insieme $\{1, 2, 3\}$ sono $3! = 6$, quindi la sommatoria (2) avrà 6 addendi; per ognuna di queste permutazioni p l'addendo corrispondente sarà del tipo $s(p)\ a_{1p(1)}a_{2p(2)}a_{3p(3)}$. Più precisamente avremo gli addendi:

- $+a_{11}a_{22}a_{33}$ corripondente alla permutazione $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$ (permutazione identica, che è una permutazione pari)
- $-a_{11}a_{23}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 1$, $p(2) = 3$, $p(3) = 2$ (una trasposizione, quindi una permutazione dispari)
- $+a_{12}a_{23}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2$, $p(2) = 3$, $p(3) = 1$ (si può scrivere come composizione di due trasposizioni, quindi una permutazione pari)
- $-a_{12}a_{21}a_{33}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 3$ (una trasposizione, quindi una permutazione dispari)
- $+a_{13}a_{21}a_{32}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3$, $p(2) = 1$, $p(3) = 2$ (si può scrivere come composizione di due trasposizioni, quindi una permutazione pari)
- $-a_{13}a_{22}a_{31}$ corrispondente alla permutazione $p(1) = 3$, $p(2) = 2$, $p(3) = 1$ (una trasposizione, quindi una permutazione dispari)

Quindi il determinante risulta essere

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

È necessario introdurre un modo per calcolare il determinante, alternativo alla definizione, il cui utilizzo diretto richiederebbe di scrivere una sommatoria che per una matrice di ordine n ha $n!$ addendi, tanti quanti le permutazioni di n elementi (si pensi che già per $n = 4$ abbiamo $4! = 24$ addendi). Allo scopo di calcolare il determinante, useremo la cosiddetta *formula di Laplace*.

3.3 Formula di Laplace

Si rimanda al Capitolo 3 delle dispense, paragrafo 3.3.

Osservazione 3.3. Per calcolare il prodotto vettoriale tra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (vedi Capitolo 1, formula 1.22) non è necessario studiare a memoria la formula, perché si può ricavare calcolando il determinante di una matrice 3×3. Tale matrice si costruisce in questo modo:

- nella prima riga disponiamo le lettere $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, che indicano i versori della base canonica in $\mathbb{R}^3$;
- nella seconda riga le coordinate del vettore $\mathbf{x}$;
- nella terza riga le coordinate del vettore $\mathbf{y}$.

Calcolando il determinante (sviluppando Laplace secondo la prima riga), si ottiene

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\,\mathbf{i} - (x_1y_3 - x_3y_1)\,\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\mathbf{k}$$

che sono proprio le coordinate del vettore $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$

3.4 Proprietà del determinante

Proprietà 3.1. Il determinante di una matrice è uguale a quello della sua trasposta

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Esempio 3.2.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2(5+6) = -22$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -2(5+6) = -22$$

Proprietà 3.2. Il determinante di una matrice triangolare (inferiore o superiore) è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

In particolare, anche il determinante di una matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.

Esempio 3.3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 16 & -50 \\ 0 & 1 & 2022 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -10$$

Proprietà 3.3. Se gli elementi di una riga o di una colonna sono moltiplicati per uno stesso numero $c \in \mathbb{R}$, il determinante è dato da $c\det(A)$

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Esempio 3.4.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Se moltiplico la prima colonna per 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(6-5) = 2 = 2\det(A)$$

Proprietà 3.4. Se gli elementi di una riga o di una colonna sono somma di due addendi, il determinante è la somma dei determinanti delle due matrici che si ottengono da A sostituendo agli elementi della riga o della colonna in questione i primi o i secondi addendi (e lasciando fissi gli altri)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Esempio 3.5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Gli elementi della seconda colonna sono somma di due addendi. Il determinante a sinistra è 17. Mentre a destra $10 + 7$.

Proprietà 3.5. Scambiando fra loro due righe o due colonne di una matrice, il corrispondente determinante cambia di segno.

Esempio 3.6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Scambio seconda e terza riga

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

Proprietà 3.6. Il determinante di una matrice con due righe o due colonne uguali è nullo. Infatti lo scambio di tali righe (o colonne) non altera il determinante, ma per la Proprietà 3.5 deve essere $\det(A) = -\det(A)$, quindi $\det(A) = 0$.

Proprietà 3.7. Se agli elementi di una riga si sommano gli elementi di un'altra riga moltiplicata per un numero, il determinante non cambia. In particolare se $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se per esempio alla seconda riga sommiamo la terza riga moltiplicata per un numero c, si ottiene la matrice

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ca_{31} & a_{22} + ca_{32} & a_{23} + ca_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Quindi, applicando prima la Proprietà 3.4, poi la Proprietà 3.3, si ottiene

$$\det(A') = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(A) + c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det(A)$$

tenuto conto che il determinante di una matrice con due righe uguali è nullo.

Proprietà 3.8. Se sono nulli tutti gli elementi di una riga o di una colonna, $\det(A) = 0$.

Esempio 3.7. Sviluppando la formula di Laplace sulla riga con tutti zeri, si vede subito che $\det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Proprietà 3.9. Il determinante di una matrice è nullo se e solo se una sua riga (o colonna) è combinazione lineare delle altre righe (o colonne).
Segue dalle precedenti proprietà, infatti supponiamo che la terza riga sia combinazione lineare delle altre due

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_1a_{11}+c_2a_{21} & c_1a_{12}+c_2a_{22} & c_1a_{13}+c_2a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_1a_{11} & c_1a_{12} & c_1a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_2a_{21} & c_2a_{22} & c_2a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

in quanto ci sono due righe uguali.

Esercizio 3.1. Calcolare il determinante della matrice, cercando di applicare le proprietà, in modo da semplificare il calcolo

$$\begin{bmatrix} ad+4 & c+7 & 4b+5 & 5a \\ 2b+1 & bc+1 & b+1 & a \\ 3d-4 & -2d+6 & bd+2 & 2a \\ -2c & 3c & c & ac \end{bmatrix} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Soluzione. Ci si riconduce al calcolo del determinante di una matrice triangolare

$$abc^2 \begin{vmatrix} ad & 1 & 4 & 5 \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & d & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2d^2$$