PROGRAMMA DI GEOMETRIA E ALGEBRA

Ingegneria Elettrica, Elettronica e Informatica
A.A. 2021-2022
Docente: Federica Pes

Vettori geometrici e coordinate: vettori geometrici applicati nel piano e nello spazio tridimensionale: definizione, somma, prodotto per uno scalare, proprietà (senza dim.), coordinate e proprietà delle coordinate rispetto a somma e prodotto per scalari (con dim.). Base ortonormale. Lunghezza di vettori in coordinate (con dim. nel piano, senza dim. nello spazio). Angolo tra vettori in coordinate (con dim. nel piano, senza dim. nello spazio). Prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e proprietà di simmetria e bilinearità (con dim.), perpendicolarità tra vettori. Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$, perpendicolarità ad entrambi i fattori (con dim.) e proprietà di antisimmetria e bilinearità (senza dim.). Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$, lunghezza (con dim.) e verso del vettore geometrico ottenuto dal prodotto vettoriale (basi destrorse e sinistrorse).

Numeri complessi: rappresentazione algebrica, operazioni di somma e prodotto e proprietà (senza dim.). Rappresentazione geometrica, modulo di un numero complesso, rappresentazione trigonometrica e rappresentazione esponenziale.

Spazi vettoriali: definizione di spazio vettoriale reale e spazio vettoriale complesso, esempi (insieme dei vettori geometrici del piano, insieme dei vettori geometrici dello spazio tridimensionale, insieme delle funzioni reali, insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple di numeri reali). Definizione di generatori di uno spazio vettoriale; da un insieme di generatori si possono eliminare i vettori che sono combinazione dei rimanenti (con dim.); definizione di vettori linearmente indipendenti e dipendenti; definizione di base; vettori linearmente dipendenti se e solo se esiste combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli (con dim.). Vettori linearmente indipendenti se e solo se la combinazione lineare nulla è quella con coefficienti tutti nulli; fissata una base le coordinate sono uniche (con dim.); dimensione di uno spazio vettoriale; la "base canonica" di $\mathbb{R}^n$ è una base (con dim.); la dimensione come numero minimo di generatori e numero massimo di vettori indipendenti (senza dim.); definizione di sottospazio vettoriale ed esempio (insieme dei vettori di un piano che passa per l'origine), esempio di un sottoinsieme che non è sottospazio (insieme dei vettori che hanno secondo estremo in un piano che non passa per l'origine); sottospazio generato da un insieme di vettori (con dim.); dimensione di un sottospazio. Cenni agli spazi di dimensione infinita. Sistemi di riferimento: equazioni parametriche di una retta nello spazio (con dim.) e nel piano; equazioni parametriche di un piano (con dim.); equazioni parametriche di una retta passante per due punti distinti (con dim.); equazioni parametriche di un piano passante per tre punti non allineati (con dim.); equazione cartesiana di un piano (con dim.); equazione cartesiana di una retta nel piano; equazioni cartesiane di una retta nello spazio.

Matrici: definizione, trasposta, sottomatrice; matrici quadrate: simmetrica, triangolare superiore, triangolare inferiore, diagonale, matrice identità. Matrici a gradini. Operazioni: somma di matrici e proprietà, prodotto per uno scalare e proprietà, prodotto di matrici e proprietà; $(AB)^T = B^T A^T$ (con dim.). Determinante: premessa sulle permutazioni (trasposizioni, permutazioni pari e dispari, segno di una permutazione), definizione di determinante, formula di Laplace, proprietà del determinante. Determinante: prodotto vettoriale calcolato tramite determinante.

federica.pes@unica.it.

Sistemi di equazioni lineari: forma generica (sistema di m equazioni lineari in n incognite), definizione di soluzione, sistema in forma matriciale, matrice dei coefficienti e matrice completa; equazioni superflue; sistemi compatibili e incompatibili; sistema omogeneo; corrispondenza tra le operazioni sulle equazioni del sistema e le operazioni sulle righe della matrice completa; se i sottospazi generati dalle righe delle matrici complete di due sistemi sono uguali allora i sistemi sono equivalenti (con dim.). Introduzione all'algoritmo di eliminazione di Gauss-Jordan (o riduzione a gradini): operazioni elementari del primo, secondo e terzo tipo. Modificando il sistema tramite operazioni elementari non cambia l'insieme delle soluzioni (senza dim.), algoritmo di Gauss-Jordan, "infinito alla k" soluzioni. Le righe non nulle di una matrice ridotta a gradini sono linearmente indipendenti (con dim.). Definizione di rango per righe e esempi di applicazione; rango per righe coincide con il rango per colonne (senza dim.). Teorema di Rouché-Capelli (con dim.). Una matrice quadrata di ordine n ha rango n se e solo se il determinante è diverso da zero (con dim.). L'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (con dim.); l'insieme delle soluzioni di un sistema non omogeneo si possono ottenere come somma di una sua soluzione particolare e le soluzioni del sistema omogeneo associato (con dim.). Applicazioni geometriche della teoria sui sistemi lineari: rette incidenti, rette sghembe e rette parallele. Passaggio da equazioni cartesiane a parametriche di una retta e viceversa. Passaggio da equazioni parametriche a cartesiane di un piano (tramite sostituzione e mediante il determinante). Generica equazione cartesiana del piano che contiene una retta (con dim.). Esempi di: equazione del piano che contiene una retta e soddisfa altre condizioni (passaggio per un punto, parallelismo con un altro piano); piano che contiene due rette. Ultime osservazioni sul determinante: rette complanari; calcolo del rango di una matrice tramite il calcolo dei determinanti delle sottomatrici quadrate; teorema dei minori orlati (senza dim.).

Applicazioni lineari: definizione ed esempi (funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, derivata di una funzione, trasposta di una matrice), esempi geometrici (rotazione, riflessione, proiezione). Matrice associata ad un'applicazione lineare ed esempi (matrice associata a rotazione, proiezione, riflessione). Richiami su funzioni iniettive, suriettive e biettive ed esempi. L'immagine è un sottospazio vettoriale di W (con dim.); un insieme di generatori per $Im(f)$ è dato dalle immagini dei vettori generatori di V (con dim.); criterio di suriettività. Definizione di sottospazio affine. Definizione di nucleo $N(f)$; il nucleo è un sottospazio vettoriale di V (con dim.); struttura delle controimmagini (con dim.); criterio di iniettività (con dim.). Teorema della dimensione (con dim., o di nullità più rango). Teorema del completamento di una base (senza dim.). Conseguenze del teorema della dimensione su iniettività e suriettività (con dim.). Richiami su composizione e invertibilità di funzioni ed esempi. Composizione di applicazioni lineari e prodotto di matrici. Esempio: composizione di due rotazioni. La composizione di applicazioni lineari non è commutativa (come il prodotto di matrici). Esempio di composizione tra due funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Esempio geometrico: composizione di rotazione e riflessione. La composizione di applicazioni lineari è associativa (come il prodotto di matrici). La matrice associata all'applicazione identica è la matrice identità. Matrice invertibile (o non singolare): definizione, corrispondenza con le funzioni invertibili. Una matrice quadrata di ordine n è invertibile se e solo se il rango è uguale a n. O equivalentemente una matrice quadrata di ordine n è invertibile se e solo se il determinante è diverso da zero. Metodo di riduzione a gradini di $[A|I]$ per ottenere l'inversa (con dim.). Metodo dei cofattori per il calcolo dell'inversa di una matrice (senza dim.). Teorema di Cramer. Teorema di Binet (senza dim.); determinante dell'inversa (con dim.). Inversa del prodotto (con dim.).

Autovalori e autovettori: definizione. Calcolo di autovalori e autovettori: polinomio caratteristico ed equazione caratteristica (con dim.). Autospazio: definizione, è un sottospazio vettoriale. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica: definizione. La molteplicità geometrica è minore uguale della molteplicità algebrica (con dim.). Endomorfismo diagonalizzabile: definizione.

L'unione delle basi degli autospazi è un insieme di vettori indipendenti (senza dim.). Criterio di diagonalizzabilità (senza dim.). Autovettori relativi ad autovalori distinti sono indipendenti (con dim.). Matrici diagonalizzabili e similitudine (con dim.). Cambiamento di coordinate e similitudine delle matrici associate a endomorfismi rispetto a basi diverse (con dim.). Osservazioni sul polinomio caratteristico: indipendenza del polinomio caratteristico dalla base (con dim.); il termine noto coincide con $\det(A)$; il $\det(A)$ è uguale al prodotto delle radici.

Prodotti scalari in generale: definizione di forma bilineare, simmetrica, definita positiva. Norma di un vettore ed angolo tra due vettori, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (senza dim.), proprietà della norma e disuguaglianza triangolare (con dim.). Forme bilineari in coordinate (con dim.) e matrice associata a una forma bilineare rispetto a una base. Prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$. Forma bilineare, simmetrica e: definita positiva, semidefinita positiva, definita negativa, semidefinita negativa, indefinita; criterio degli autovalori e criterio delle sottomatrici principali per la determinazione del tipo di una forma (senza dim.). Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio (con dim.). Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, basi ortonormali. Coordinate di un vettore rispetto a una base ortonormale (con dim.). Formule per la proiezione ortogonale su un piano e la riflessione rispetto a un piano in coordinate (con dim.). Rotazioni attorno agli assi coordinati (con dim.) e attorno ad un asse qualunque (cenno). Definizione di matrice ortogonale; la matrice di cambiamento di coordinate tra due basi ortonormali è una matrice ortogonale (senza dim.); il determinante di una matrice ortogonale è $+1$ o -1 (con dim.). Isometrie lineari: la matrice associata ad un'isometria lineare è una matrice ortogonale (con dim.). Le isometrie lineari del piano sono o rotazioni o riflessioni. Le isometrie lineari dello spazio sono o rotazioni, o riflessioni o riflessioni rotatorie (solo cenno). La composizione di due rotazioni nello spazio è una rotazione. La composizione di due riflessioni nello spazio è una rotazione. Esempio composizione di due rotazioni (determinazione di asse e angolo di rotazione). Le colonne (righe) di una matrice ortogonale sono vettori ortonormali. Il teorema spettrale per matrici simmetriche reali: enunciato. Gli autospazi relativi ad autovalori diversi di una matrice simmetrica reale sono ortogonali (con dim.). Caso complesso (cenni): prodotto hermitiano, norma, matrice unitaria, matrice hermitiana, diagonalizzazione di matrici hermitiane mediante matrici unitarie (solo enunciato).

Coniche e quadriche: introduzione alle coniche. Distanza tra due punti. Distanza tra un punto ed un piano (nello spazio). Distanza tra un punto ed una retta (nel piano). Coniche: definizione e formule in forma canonica. Coniche non degeneri: ellisse (e circonferenza), iperbole, parabola. Coniche degeneri: punto, insieme vuoto, due rette incidenti, due rette parallele, una retta. Classificazione coniche in forma non canonica. Esempio di riduzione a forma canonica di una conica tramite rotazioni e traslazioni. Quadriche: definizione e formule in forma canonica. Ellissoide (e sfera), iperboloide a una falda, iperboloide a due falde, paraboloide ellittico, paraboloide iperbolico, insieme vuoto, un punto, cono, cilindro ellittico, cilindro iperbolico, cilindro parabolico, una retta, due piani incidenti, due piani paralleli, un piano. Esempio di riduzione a forma canonica tramite rotazioni e traslazioni.

con dim. = con dimostrazione
senza dim. = senza dimostrazione