Simulazione prova scritta di Geometria e Algebra
maggio 2022

1. Si diano le seguenti definizioni:

   - vettori linearmente indipendenti;
   - autovettore di un endomorfismo f;
   - prodotto scalare su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

2. Applicare l'algoritmo di riduzione di Gauss–Jordan al seguente sistema lineare e determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + kx_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ kx_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$$

   Soluzione.

$$k = 2,\ \infty^2 \text{ soluzioni },\ \mathbf{x} = [-2 - 2s + t, 1 - 3t, s, t]^T,\ s, t \in \mathbb{R}$$

$$k \neq 2,\ \infty^1 \text{ soluzioni },\ \mathbf{x} = [3t, 1 - (1 + k)t, -1 - t, t]^T,\ t \in \mathbb{R}$$

3. Sia f l'applicazione lineare definita da

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

   Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Determinare il nucleo di f, una sua base e specificare la $\dim(N(f))$. Determinare l'immagine di f, una sua base e specificare la $\dim(Im(f))$. Si dica se f è un'applicazione lineare iniettiva, suriettiva, biettiva o nessuno dei casi.

   Soluzione.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N(f) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}, \quad B_{N(f)} = \left\{ [-1, 1, 1]^T \right\}, \quad \dim(N(f)) = 1$$

$$Im(f) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}, \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}, \quad \dim(Im(f)) = 2$$

$$B_{Im(f)} = \left\{ [1,0,1,2]^T, [1,1,0,1]^T \right\}$$

4. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

si dica se A è invertibile ed in caso affermativo determinare la sua inversa A^{-1}. Determinare autovalori ed autovettori. Dire se A è una matrice diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori.

Soluzione.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Autovalori ed autovettori

$$\lambda_1 = 1, \quad V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s - t/2 \\ s \\ t \end{bmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_2 = 2, \quad V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Base di autovettori

$$\left\{ [1,1,0]^T, [-1/2,0,1]^T, [1,1,1]^T \right\}.$$

5. Mediante il procedimento di Gram-Schmidt, si trovi una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = [1,1,1,1]^T, \qquad v_2 = [1,1,0,0]^T, \qquad v_3 = [2,0,0,0]^T.$$

Soluzione.

$$u_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^T, \qquad u_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right]^T, \qquad u_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right]^T.$$