Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 10A del 20/12/2021

Metodi alle differenze finite, formule monostep

1) (Prova scritta - 6 luglio 2016)
Si approssimi la soluzione del seguente problema di Cauchy in $x = 1$

$$\begin{cases} y' = (1+y)x, & x \in [0,3] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

utilizzando il seguente schema con passo $h = \frac{1}{2}$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, \eta_k + \frac{h}{2} f(x_k, \eta_k)\right).$$

SOLUZIONE:
$\eta_1 = 5/4$, $\eta_2 = 563/256$. η_2 approssima la soluzione in $x = 1$.

2) (Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2018)
Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3xy - y', & x \in \left[\frac{2}{3}, 5\right] \\ y(\frac{2}{3}) = -1, \quad y'(\frac{2}{3}) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{4}{3}$.
SOLUZIONE:
$\boldsymbol{\eta}_1 = [-1, -\frac{2}{3}]^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = [-\frac{11}{9}, -\frac{13}{9}]^T$.

3) (tratto da Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2018)
Classificare il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha - 3}\left[f(x_k, \eta_k) + 2f(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k))\right].$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono stabile lo schema. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2.
SOLUZIONE:
Lo schema è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k, e non le approssimazioni precedenti η_{k-1}, η_{k-2},...), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 6$ e $\beta = \frac{3}{8}$.