Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 10B del 21/12/2021

Metodi alle differenze finite, formule monostep

1) Si approssimi la soluzione del seguente problema di Cauchy in $x = 2$

$$\begin{cases} y' = -2xy^2, \quad x \in [1, 5] \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

utilizzando il seguente schema con passo $h = \frac{1}{2}$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, \eta_k + \frac{h}{2} f(x_k, \eta_k)\right).$$

SOLUZIONE:
$\eta_1 = 11/16$, $\eta_2 = 11/16 - (7/4)(341/1024)^2$. η_2 approssima la soluzione in $x = 2$.

2) (Prova scritta - 27 giugno 2018)
Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (y' - 1)x - y, \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 7\right] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, \quad y'(\frac{1}{2}) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.
SOLUZIONE:
$\boldsymbol{\eta}_1 = [1, -\frac{3}{4}]^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = [\frac{5}{8}, -\frac{17}{8}]^T$.

3) (tratto da Prova scritta - 18 settembre 2019)
Classificare e discutere la convergenza della seguente formula alle differenze finite al variare dei parametri reali α e β

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4}\left[\alpha f(x_i, \eta_i) + f\left(x_i + \frac{\beta}{3}h, \eta_i + \frac{\beta}{3}hf(x_i, \eta_i)\right)\right].$$

SOLUZIONE:
Lo schema è monostep (perché la valutazione di η_{i+1} richiede la sola conoscenza di η_i, e non le approssimazioni precedenti η_{i-1}, η_{i-2},...), esplicito (perché η_{i+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). La formula è stabile per ogni valore dei parametri α e β. È convergente del primo ordine $\forall \beta \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$ e $\alpha = 3$. È convergente del secondo ordine se $\alpha = 3$ e $\beta = 6$.