Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 11 del 07/01/2022

Metodi alle differenze finite, formule monostep e multistep

1) (tratto da Prova scritta - 18 settembre 2019)
Classificare il metodo e dire se è stabile

$$\eta_i = -\eta_{i-2} + 4hf(x_{i-1}, \eta_{i-1}).$$

SOLUZIONE:
Il metodo è multistep, esplicito, ad uno stadio. Inoltre è stabile.

2) (tratto da Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2018)
Si classifichi il seguente metodo alle differenze finite:

$$\eta_{k+1} = (\gamma + 1)\eta_k - \gamma\eta_{k-1} + 2h(\gamma + 1)f(x_k, \eta_k)$$

Si determinino i valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabile lo schema.

SOLUZIONE:
Il metodo è multistep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la conoscenza di η_k e di η_{k-1}), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), ad uno stadio (perché ad ogni passo f è valutata una volta) ed è stabile se $-1 \leq \gamma < 1$.

3) (Prova scritta - 11 gennaio 2021)
Dopo aver classificato il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{6}\left[2f(x_k, \eta_k) + \alpha f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))\right],$$

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ che lo rendono convergente del secondo ordine. Assegnati tali valori di α e β, applicarlo infine al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy, & x \in [1, 5], \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

con passo $h = \frac{1}{2}$, per approssimare la soluzione nel punto di ascissa $x = \frac{3}{2}$.

SOLUZIONE:
La formula è monostep, esplicita, a due stadi. È consistente per $\alpha = 4$ e $\forall\beta$. Essendo stabile è convergente per gli stessi valori dei parametri. È del secondo ordine per $\alpha = 4$ e $\beta = \frac{3}{4}$. $y(\frac{3}{2}) \simeq \eta_1 = \frac{115}{32}$.

4) (Prova scritta - 11 gennaio 2021)
Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{y'}{y} - x, & x \in [0, 4], \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.
<u>SOLUZIONE</u>:
$\boldsymbol{\eta}_1 = [2, 3]^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = [7/2, 7/2]^T$, $\boldsymbol{\eta}_3 = [21/4, 7/2]^T$.

5) (Recupero seconda prova intermedia - 25 gennaio 2018)
Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \dfrac{1}{3}\alpha h \left[f(x_k, \eta_k) + 5f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))\right]$,

(b) $\eta_{k+1} = (3\gamma + 2)\eta_k - (2\gamma^2 + 3\gamma + 1)\eta_{k-1} + \delta h f(x_{k-1}, \eta_{k-1})$.

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

<u>SOLUZIONE</u>:
Lo schema (a) è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k, e non le approssimazioni precedenti η_{k-1}, η_{k-2},...), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/5$.
Lo schema (b) è multistep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la conoscenza di η_k e di η_{k-1}), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), ad uno stadio (perché ad ogni passo f è valutata una volta) ed è stabile se $-1 \leq \gamma < 0$.