Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 12 del 10/01/2022

Algebra lineare, PA=LU, metodi iterativi per sistemi lineari, serie di Fourier, trasformata di Fourier

1) (Seconda prova intermedia - 13 gennaio 2017)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & \alpha & -2 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ -2 & \alpha & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$. Si determinino i valori del parametro α che rendono B l'inversa di A e si calcoli l'indice di condizionamento della matrice A in norma ∞, 1 e 2. Si dica, inoltre, sulla base dei calcoli fatti e motivando la risposta se A è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di β che rendono C una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{w}$.

SOLUZIONE:
B è l'inversa di A se $\alpha = 2$, $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = 7$, $\kappa_2(A) = 5$. A non è definita positiva.
C è ortogonale se $\beta = \pm\sqrt{3}$.
Se $\beta = \sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}]^T$ mentre se $\beta = -\sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}]^T$.

2) (Prova scritta - 12 giugno 2018)
Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [-4, -4, -8, -5]^T$.

SOLUZIONE:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 13/4 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = 78, \quad \mathbf{x} = [-1, -1, -1, -1]^T$.

3) (Prova scritta - 13 luglio 2018)
Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$. È possibile dire qual è la soluzione del sistema senza fare ulteriori calcoli?

SOLUZIONE:
A è non singolare se $\alpha \neq 0, 2$. Il metodo di Jacobi converge se $-2 < \alpha < 2$ e $\alpha \neq 0$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 1/2, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 1/2, 0]^T$. Poiché il metodo è consistente, la soluzione è $\mathbf{x} = [1, 1/2, 0]^T$.

4) (Prima prova intermedia - 14 novembre 2017 - compito 1)
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2, 2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x) + \sqrt{2}y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & -2 \leq x < -1, \\ 2 + x & -1 \leq x < 0, \\ 2 - x & 0 \leq x < 1, \\ 1 & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \frac{5\sqrt{2}}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) \left[\frac{16\sqrt{2}}{k^2\pi^2(8 + k^2\pi^2)} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{8}{k\pi(8 + k^2\pi^2)} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]$$

5) (Prova scritta - 18 febbraio 2020)
Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = \delta(x + 1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \mathrm{e}^{x+1}\left(1 - \mathrm{e}^{x+1}\right) H(-x - 1) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x+1}\left(1 - \mathrm{e}^{x+1}\right) & x \leq -1 \\ 0 & x > -1 \end{cases}$$