Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 1A del 11/10/2021

Algebra lineare

1) Dati i seguenti vettori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \\ -10 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1+4\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 3-2\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3+2\mathrm{i} \\ 2 \\ -1-4\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

calcolare le somme $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{z}+\mathbf{w}$.

<u>SOLUZIONE</u>:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z}+\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4+6\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \\ 2-6\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

2) Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 4 & 2 & 11 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed i vettori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti $A\mathbf{x}$, BC, $C^T\mathbf{y}$, $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$.

<u>SOLUZIONE</u>:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 27 \\ -1 \\ -14 \\ 22 \end{bmatrix}, \qquad BC = \begin{bmatrix} 22 & 40 \\ 8 & 19 \\ 30 & 55 \end{bmatrix}, \qquad C^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 25 \\ 39 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 49, \qquad \mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 20 & 50 \\ 6 & 8 & 4 & 10 \\ 9 & 12 & 6 & 15 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

3) Dati i seguenti vettori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1+4\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 3-2\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5+2\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

calcolare le loro norme 1, 2 e ∞.

<u>SOLUZIONE</u>:
$\|\mathbf{x}\|_1 = \frac{11}{6}$, $\quad \|\mathbf{x}\|_2 = \frac{7}{6}$, $\quad \|\mathbf{x}\|_\infty = 1$
$\|\mathbf{y}\|_1 = \sqrt{17} + 1 + \sqrt{13}$, $\quad \|\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{31}$, $\quad \|\mathbf{y}\|_\infty = \sqrt{17}$
$\|\mathbf{z}\|_1 = 3 + \sqrt{29} + \sqrt{2}$, $\quad \|\mathbf{z}\|_2 = 2\sqrt{10}$, $\quad \|\mathbf{z}\|_\infty = \sqrt{29}$
$\|\mathbf{w}\|_1 = \frac{11}{6}$, $\quad \|\mathbf{w}\|_2 = \frac{\sqrt{53}}{6}$, $\quad \|\mathbf{w}\|_\infty = 1$

4) (Prima prova intermedia - 5 novembre 2019 - Compito 1 - Esercizio 1)
Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_2$ e si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_3$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Si calcoli la matrice $A = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2^T$ e si dica quanto vale il suo determinante.

<u>SOLUZIONE</u>:
Il vettore $\mathbf{v}_1$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_2$.
$\|\mathbf{v}_3\|_\infty = 2$, $\|\mathbf{v}_3\|_1 = 6$, $\|\mathbf{v}_3\|_2 = \sqrt{10}$.
I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}.$$

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha determinante nullo perché la matrice ha rango 1.