Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 1B del 12/10/2021

Algebra lineare

1) Dati i seguenti vettori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -5 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3\mathrm{i}+1 \\ 3-2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2+4\mathrm{i} \\ -6 \\ -1-5\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

calcolare le somme $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{z}+\mathbf{w}$.

<u>SOLUZIONE</u>:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ -2 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z}+\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3+7\mathrm{i} \\ -3-2\mathrm{i} \\ -1-4\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

2) Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 8 \\ 7 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ed i vettori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

calcolare i prodotti $A\mathbf{x}$, B^TC, $C^T\mathbf{z}$, $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$.

<u>SOLUZIONE</u>:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 34 \\ \frac{86}{3} \\ -\frac{39}{2} \\ 90 \end{bmatrix} \qquad B^TC = \begin{bmatrix} 50 & 36 \\ 27 & 14 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} \qquad C^T\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = -7 \qquad \mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -4 & 16 \\ 9 & 15 & -6 & 24 \\ 30 & 50 & -20 & 80 \\ -3 & -5 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

3) Dati i seguenti vettori

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1+5\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5+2\mathrm{i} \\ 10 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

calcolare le loro norme 1, 2 e ∞.

SOLUZIONE:
$\|\mathbf{x}\|_1 = \frac{11}{6}$, $\|\mathbf{x}\|_2 = \frac{7}{6}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$,
$\|\mathbf{y}\|_1 = \sqrt{26}+1+\sqrt{13}$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 2\sqrt{10}$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = \sqrt{26}$,
$\|\mathbf{z}\|_1 = 14+\sqrt{29}$, $\|\mathbf{z}\|_2 = \sqrt{145}$, $\|\mathbf{z}\|_\infty = 10$,
$\|\mathbf{w}\|_1 = \frac{11}{6}$, $\|\mathbf{w}\|_2 = \frac{\sqrt{53}}{6}$, $\|\mathbf{w}\|_\infty = 1$.

4) (Prima prova intermedia - 5 novembre 2019 - Compito 2 - Esercizio 1)
Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_2$ e si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_3$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Si calcoli la matrice $A = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2^T$ e si dica quanto vale il suo determinante.

SOLUZIONE:
Il vettore $\mathbf{v}_1$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_2$.
$\|\mathbf{v}_3\|_\infty = 1$, $\|\mathbf{v}_3\|_1 = 4$, $\|\mathbf{v}_3\|_2 = 2$.
I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{5} \end{bmatrix}.$$

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ha determinante nullo perché la matrice ha rango 1.