Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 2A del 18/10/2021
Algebra lineare e Serie di Fourier

1) (Prima prova intermedia - 14 novembre 2017 - Compito 1 - Esercizio 2)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro β che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro α che rendono C una matrice non singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1}.

<u>SOLUZIONE</u>:
$B \equiv A^{-1}$ se $\beta = 1/2$.
C è non singolare per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
D è ortogonale se $\alpha = -1$, $\sigma(D) = \sigma(D^{-1}) = \{-1, 1, 1\}$, $\rho(D) = \rho(D^{-1}) = 1$.

2) (Prima prova intermedia - 5 novembre 2019 - Compito 1 - Esercizio 2)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2\beta & -1 & \beta \\ -1 & 1 & -1 \\ \beta & -1 & 2\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Determinare i valori di α che rendono invertibile la matrice A e, fissato $\alpha = 1$, i valori di β che rendono B l'inversa di A. Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di A e il raggio spettrale di A, B e A^3. Si calcoli infine la norma ∞ del vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (2, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})^T$.

<u>SOLUZIONE</u>:
La matrice A è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{6}/3$.
B è l'inversa di A per $\beta = 1$.
$\sigma(A) = \{1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}, \quad \rho(A) = 2 + \sqrt{3}$,
$\rho(B) = \rho(A^{-1}) = 1/(2 - \sqrt{3}), \quad \rho(A^3) = \rho(A)^3 = (2 + \sqrt{3})^3$.
$\mathbf{y} = (2 + \mathrm{i}, 3 + 4\mathrm{i}, 1 + 2\mathrm{i})^T, \quad \|\mathbf{y}\|_\infty = 5$.

3) (Prova d'esame - 27 febbraio 2015) Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & -1 \le x < 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

SOLUZIONE:
$a_0 = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}, \quad a_k = \frac{1}{k^2\pi^2}[1-(-1)^k] + \frac{1}{\pi+2k\pi} + \frac{1}{\pi-2k\pi}, \qquad b_k = (-1)^{k+1}[\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k\pi-\pi} + \frac{1}{2k\pi+\pi}],$

$$S_f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{ \left[\frac{1}{k^2\pi^2}\left(1-(-1)^k\right) + \frac{1}{\pi+2k\pi} + \frac{1}{\pi-2k\pi}\right]\cos(k\pi x) + \right.$$
$$\left. + \left[(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k\pi-\pi} + \frac{1}{2k\pi+\pi}\right)\right]\sin(k\pi x)\right\}$$