Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 2B del 19/10/2021
Algebra lineare e Serie di Fourier

1) (Prima prova intermedia - 14 novembre 2017 - Compito 2 - Esercizio 2)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta \\ -\delta & 1 & 0 \\ -\delta & \delta & 0 \end{bmatrix},$$

dove γ e δ sono parametri reali. Si determinino i valori del parametro γ che rendono la matrice B l'inversa della matrice A e i valori del parametro δ che rendono C una matrice singolare. Si consideri poi la matrice $D = A + C$ e si stabilisca per quali valori del parametro δ la matrice D è ortogonale. Fissato tale valore, si calcolino spettro e raggio spettrale di D. Motivando opportunamente la risposta, si indichi spettro e raggio spettrale di D^{-1}.

SOLUZIONE:
$B \equiv A^{-1}$ se $\gamma = 2$.
C è singolare se $\delta \in \{0, 1\}$.
D è ortogonale se $\delta = -1$, $\sigma(D) = \sigma(D^{-1}) = \{1, -1, 1\}$, $\rho(D) = \rho(D^{-1}) = 1$.

2) (Prima prova intermedia - 5 novembre 2019 - Compito 2 - Esercizio 2)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3\beta & -1/2 & \beta \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ \beta & -1/2 & 3\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Determinare i valori di α che rendono invertibile la matrice A e, fissato $\alpha = 1$, i valori di β che rendono B l'inversa di A. Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di A e il raggio spettrale di A, B e A^3. Si calcoli infine la norma ∞ del vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (2, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})^T$.

SOLUZIONE:
La matrice A è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2}/2$.
B è l'inversa di A per $\beta = 1/4$.
$\sigma(A) = \{2, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$, $\quad \rho(A) = 2 + \sqrt{2}$,
$\rho(B) = \rho(A^{-1}) = 1/(2 - \sqrt{2})$, $\quad \rho(A^3) = \rho(A)^3 = (2 + \sqrt{2})^3$.
$\mathbf{y} = (4 + \mathrm{i}, 3 + 3\mathrm{i}, 2 + 3\mathrm{i})^T$, $\quad \|\mathbf{y}\|_\infty = \sqrt{18}$.

3) Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>:
$a_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}$,
$a_k = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1+(-1)^k}{1+k} + \frac{1+(-1)^k}{1-k}\right] + \frac{(-1)^k-1}{k^2\pi}$, per $k \neq 1$,
$b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ per $k \neq 1$,
$a_1 = -\frac{2}{\pi}$, $b_1 = \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} S_f(x) =& \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{3}{2}\sin(x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1+(-1)^k}{1+k} + \frac{1+(-1)^k}{1-k}\right) + \frac{(-1)^k-1}{k^2\pi}\right]\cos(kx) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)\right\} \end{aligned}$$