Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 3A del 25/10/2021

Risoluzione di ODE tramite serie di Fourier

1) Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine e se è integrabile termine a termine

$$y''(x) + \sqrt{2}y'(x) + y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \\ \sin(\pi x) & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>:

La funzione non è differenziabile termine a termine perché ....

La funzione è integrabile termine a termine perché ....

I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono

$\widetilde{a_0} = \widetilde{a_k} = 0$ ($f(x)$ è dispari), $\widetilde{b_k} = \left(\frac{8k}{\pi(\pi^2-4k^2)} + \frac{1}{k\pi}\right)\cos(k) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$.

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{1}{1+16k^4}\left[\left(\frac{8k}{\pi(\pi^2-4k^2)} + \frac{1}{k\pi}\right)\cos(k) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\right]\left[-2\sqrt{2}k\cos(2kx) + (1-4k^2)\sin(2kx)\right]$$

2) Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4, 4]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x) + y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & -4 \leq x < -\pi \\ \cos x & -\pi \leq x < \pi \\ -1 & \pi \leq x < 4 \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>:

La funzione è differenziabile termine a termine perché ....

I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono

$\widetilde{a_0} = \frac{\pi-4}{4}$, $\widetilde{a_k} = \left(\frac{2k\pi}{16-k^2\pi^2} + \frac{2}{k\pi}\right)\sin\left(k\frac{\pi^2}{4}\right)$, $\widetilde{b_k} = 0$ ($f(x)$ è pari).

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{\pi-4}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{128}{(16+k^2\pi^2)(16-k^2\pi^2)}\sin(k\frac{\pi^2}{4})\right]\left[\frac{4}{k\pi}\cos(k\frac{\pi}{4}x) + \sin(k\frac{\pi}{4}x)\right]$$