Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 3B del 26/10/2021

Risoluzione di ODE tramite serie di Fourier

1) Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine e se è integrabile termine a termine

$$y'(x) + y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} \le x < -\frac{1}{2} \\ \sin(\pi x) & -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

SOLUZIONE:
La funzione non è differenziabile termine a termine perché ...
La funzione è integrabile termine a termine perché ...
I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono
$\widetilde{a_0} = \widetilde{a_k} = 0$ ($f(x)$ è dispari), $\widetilde{b_k} = \left(\frac{8k}{\pi(\pi^2-4k^2)} + \frac{1}{k\pi}\right)\cos(k) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$.
La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+4k^2} \left[\left(\frac{8k}{\pi(\pi^2-4k^2)} + \frac{1}{k\pi}\right)\cos(k) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\right] [-2k\cos(2kx) + \sin(2kx)]$$

2) (Prima prova intermedia - 12 novembre 2018 - compito 1)
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4, 4]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y''(x) + 5y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & -4 \le x < -\pi \\ \cos x & -\pi \le x < \pi \\ -1 & \pi \le x < 4 \end{cases}$$

SOLUZIONE:
La funzione è differenziabile termine a termine perché ...
I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono
$\widetilde{a_0} = \frac{\pi-4}{4}$, $\widetilde{a_k} = \left(\frac{2k\pi}{16-k^2\pi^2} + \frac{2}{k\pi}\right)\sin\left(k\frac{\pi^2}{4}\right)$, $\widetilde{b_k} = 0$ ($f(x)$ è pari).
La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{\pi-4}{20} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{80-k^2\pi^2} \left(\frac{2k\pi}{16-k^2\pi^2} + \frac{2}{k\pi}\right)\sin\left(k\frac{\pi^2}{4}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{4}x\right)$$