Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 5A del 08/11/2021

Trasformata di Fourier, risoluzione di ODE tramite trasformata di Fourier

1) (Esame 09/01/2020 - compito 1) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 2y = H(x-1) - H(x-5), \quad x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x-5)} - \mathrm{e}^{\sqrt{2}(x-1)}\right) & x < 1 \\ \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}(x-5)} + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x-1)} - 2\right) & 1 \le x < 5 \\ \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x-1)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(x-5)}\right) & x \ge 5 \end{cases}$$

2) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 7y' + 12y = \delta(x-5), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \mathrm{e}^{3(x-5)}\left[1 - \mathrm{e}^{x-5}\right]H(5-x) = \begin{cases} 0 & x > 5 \\ \mathrm{e}^{3(x-5)}\left[1 - \mathrm{e}^{x-5}\right] & x \le 5 \end{cases}$$

3) (Esame 25/01/2018) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' - 4y = \mathrm{e}^{-3x}H(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = -\frac{1}{7}\left[\mathrm{e}^{-3x}H(x) + \mathrm{e}^{4x}H(-x)\right] = \begin{cases} -\frac{1}{7}\mathrm{e}^{-3x} & x > 0 \\ -\frac{1}{7}\mathrm{e}^{4x} & x \le 0 \end{cases}$$

4) Eseguire i seguenti calcoli

- $\mathcal{F}\left\{\delta\left(x - \frac{1}{3}\right)\sin(x)\right\}$ (Esame 11/01/2021)
- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}(k-2)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}(9+(k-2)^2)}\right\}$ (Esame 01/02/2021)
- $\mathrm{e}^{-3|x|} * [H(x+1) - H(x-2)]$ (Esame 11/01/2021)

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside, $\delta(x)$ è la delta di Dirac e il simbolo $*$ indica la convoluzione.

<u>SOLUZIONE</u>:

$$\mathcal{F}\left\{\delta\left(x-\frac{1}{3}\right)\sin(x)\right\}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\mathrm{i}(k-1)}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\mathrm{i}(k+1)}\right]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{i}(k-2)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}(9+(k-2)^2)}\right\}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x-1)}\left(\mathrm{e}^{-3(x-1)}H(x-1)-\mathrm{e}^{3(x-1)}H(1-x)\right)$$

$$\mathrm{e}^{-3|x|}*[H(x+1)-H(x-2)]=\begin{cases}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\left(\mathrm{e}^{3}-\mathrm{e}^{-6}\right) & x<-1\\ \frac{1}{3}\left(2-\mathrm{e}^{-3(x+1)}-\mathrm{e}^{3(x-2)}\right) & -1\leq x<2\\ \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{6}-\mathrm{e}^{-3}\right) & x\geq 2\end{cases}$$