Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 5B del 09/11/2021

Trasformata di Fourier, risoluzione di ODE tramite trasformata di Fourier

1) (Esame 09/01/2020 - compito 2) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y'' - y = H(x+3) - H(x+1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>SOLUZIONE</u>:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)} - \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3)}\right) & x < -3 \\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3)} - 2 + \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)}\right) & -3 \leq x < -1 \\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}(x+3)} - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)}\right) & x \geq -1 \end{cases}$$

2) (Esame 23/09/2021) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 3y = \delta(x-1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

<u>SOLUZIONE</u>:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{3(x-1)} & x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-(x-1)} & x > 1 \end{cases}$$

3) (Esame 22/07/2021) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y' - y = \mathrm{e}^{-(x-5)}H(x-5), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

<u>SOLUZIONE</u>:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x-5)} & x \leq 5 \\ -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-(x-5)} & x > 5 \end{cases}$$

4) Eseguire i seguenti calcoli

- $\mathcal{F}\left\{\delta\left(x - \dfrac{1}{5}\right)\cos(x)\right\}$ (Esame 11/01/2021)
- $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\sin(\pi x)}{3 - \mathrm{i}x}\right\}$
- $\left[\mathrm{e}^{-5x}H(x)\right] * [H(x-1) - H(x-4)]$ (Esame 01/02/2021)

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside, $\delta(x)$ è la delta di Dirac e il simbolo $*$ indica la convoluzione.

<u>SOLUZIONE</u>:

$$\mathcal{F}\left\{\delta\left(x-\frac{1}{5}\right)\cos(x)\right\} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}\mathrm{i}(k-1)} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}\mathrm{i}(k+1)}\right]$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\pi x)}{3-\mathrm{i}x}\right\} = \frac{\pi}{\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{-3(k-\pi)}H(k-\pi) - \mathrm{e}^{-3(k+\pi)}H(k+\pi)\right]$$

$$\left[\mathrm{e}^{-5x}H(x)\right] * \left[H(x-1)-H(x-4)\right] = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{1}{5}\left(1-\mathrm{e}^{5(1-x)}\right) & 1\le x<4 \\ \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}\left(\mathrm{e}^{20}-\mathrm{e}^{5}\right) & x\ge 4 \end{cases}$$