Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 7 del 29/11/2021

Algebra lineare e trasformata di Fourier

1) (Seconda prova intermedia, compito 1 - 10 gennaio 2018)
Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A e B una l'inversa dell'altra, i valori di γ che rendono C una matrice ortogonale. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ e si precisi il raggio spettrale di A. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

SOLUZIONE:
Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = 1$ e $\beta = -5/2$; C è ortogonale se $\gamma = \pm\sqrt{2}/2$; $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = \kappa_1(B) = \kappa_\infty(B) = 9/5$, $\kappa_2(A) = \kappa_2(B) = \sqrt{5}/2$, $\kappa_1(C) = \kappa_\infty(C) = 2$, $\kappa_2(C) = 1$; $\rho(A) = \sqrt{5}$; $\mathbf{x} = (BC)^{-1}\mathbf{b} = C^T A\mathbf{b} = (-\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2})^T$.

2) (Recupero seconda prova intermedia - 25 gennaio 2018)
Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori di α e β che rendono M e U una l'inversa dell'altra e che rendono simmetrica la matrice $A = LM$. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli nel modo più conveniente l'inversa di A, il suo raggio spettrale e il suo indice di condizionamento in norma 1, 2 e ∞.

SOLUZIONE:
Le matrici M e U sono una l'inversa dell'altra se $\beta = -\frac{1}{8}$; A è simmetrica se $\alpha = 1$;

$$A^{-1} = M^{-1}L^{-1} = UU^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$\rho(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{2}$; $\kappa_2(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{21-\sqrt{185}}$, $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = \frac{25}{4}$.

3) (Recupero seconda prova intermedia - 29 gennaio 2019)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/4 & \beta & 1/4 \\ \beta & 1 & \beta \\ 1/4 & \beta & 3/4 \end{bmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori di α per cui la matrice A è non singolare e per quali è definita positiva. Fissato $\alpha = 1$, si determinino i valori di β che rendono B inversa di A, e si calcoli il numero di condizionamento di A in norma 1, ∞ e 2. Infine, dopo aver verificato che Q è ortogonale, si risolva nel modo più conveniente il sistema $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è il vettore unitario.

SOLUZIONE:
A è non singolare per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}/2\}$ ed è definita positiva se $\alpha > \sqrt{2}/2$.
B è l'inversa di A se $\beta = 1/2$.
$\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = 8$, $\kappa_2(A) = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.
$\mathbf{x} = [1/3, 5/3, -1/3]^T$.

4) Eseguire i seguenti calcoli

1. $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\sin(2x)\cos(2x)}{xe^{2ix}}\right\}$ (Prova scritta - 29 gennaio 2019)

2. $\mathcal{F}\left\{\delta(x+3) * e^{-|x|}\cos(5x)\right\}$ (Prova scritta - 13 febbraio 2019)

dove il simbolo $*$ indica la convoluzione e $\delta(x)$ è la delta di Dirac.

SOLUZIONE:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2x)\cos(2x)}{xe^{2ix}}\right\} = \frac{\pi}{2}\left[H(-k+2) - H(-k-6)\right]$$

$$\mathcal{F}\left\{\delta(x+3) * e^{-|x|}\cos(5x)\right\} = e^{3ik}\left[\frac{1}{1+(k-5)^2} + \frac{1}{1+(k+5)^2}\right]$$