Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 8A del 06/12/2021

Algoritmo di Gauss, fattorizzazione $PA = LU$

1) Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

SOLUZIONE: La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$.

2) (Prova scritta 11 gennaio 2021) Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare quindi, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A, la prima e seconda colonna dell'inversa di A e la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 0, 2)^T$.

SOLUZIONE:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{10} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 9$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{17}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{10}{9}\right)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = \left(\frac{13}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{5}{9}\right)^T, \quad \mathbf{x} = \left(-\frac{19}{9}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right)^T$$

3) (Prova scritta 27 ottobre 2017)

Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, -12, -6, -12)^T$.

SOLUZIONE:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/4 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = -12$, la soluzione del sistema è $\mathbf{x} = (1, 0, -7, -6)^T$.