

Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 8B del 07/12/2021

Algoritmo di Gauss, fattorizzazione $PA = LU$

- 1) Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$$

SOLUZIONE: La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$.

- 2) (Prova scritta 11 gennaio 2021) Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare quindi, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice A , la prima e seconda colonna dell'inversa di A e la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1, 0, 2)^T$.

SOLUZIONE:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{17} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{17}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{17} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 9$$

$$A^{-1}\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right)^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = \left(-\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{13}{9}\right)^T, \quad \mathbf{x} = \left(\frac{19}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{35}{9}\right)^T$$

- 3) (Prova scritta 30 giugno 2017)

Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e calcolare la seconda colonna di A^{-1} .

SOLUZIONE:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -12/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = 12$. La seconda colonna della matrice inversa è $A^{-1}\mathbf{e}_2 = (-1/6, -5/6, 2/3, 1/2)^T$.