Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 9A del 13/12/2021

Metodi iterativi per risolvere sistemi lineari

1) (Prova scritta 11 gennaio 2021 - esercizio 5)
Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di α il metodo iterativo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel risultano essere convergenti se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0, 1]^T$. Fissato $\alpha = 1/2$, si calcolino le prime due iterate di entrambi i metodi considerando come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$.

SOLUZIONE:
Entrambi i metodi convergono per ogni valore reale di $\alpha \neq 0$. Le iterazioni del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [2, 0, -1/6]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [7/3, 0, 0]^T$; le iterazioni di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [2, 0, 0]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [2, 0, 0]^T$.

2) (Seconda prova intermedia - 9 gennaio 2020 - Compito 1)
Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è definita positiva e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 3$, si dica, motivando opportunamente la risposta, se il metodo di Gauss-Seidel è convergente e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

SOLUZIONE:
A è definita positiva se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Il metodo di Jacobi converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ o se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Se $\alpha = 3$, il metodo di Gauss-Seidel converge perché A è diagonalmente dominante in senso stretto. Le iterazioni sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/6, 7/6, -1/9]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/18, 73/54, -34/81]^T$.