Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2021/2022

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 9B del 14/12/2021

Metodi iterativi per risolvere sistemi lineari

1) (Prova scritta 11 gennaio 2021 - esercizio 6)
Sia β un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ \beta & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di β il metodo iterativo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel risultano essere convergenti se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1]^T$. Fissato $\beta = 1/2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi e fissato $\beta = 1$ si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel considerando come punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$.

<u>SOLUZIONE</u>:
Entrambi i metodi convergono per ogni valore reale di $\beta \neq 0$. Le iterazioni del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [2, -1/3, -1/5]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [12/5, -1/3, -2/15]^T$; le iterazioni di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, -1/3, -2/15]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [17/15, -1/3, -8/75]^T$.

2) (Seconda prova intermedia - 9 gennaio 2020 - Compito 2)
Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è definita positiva e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 3$, si dica, motivando opportunamente la risposta, se il metodo di Jacobi è convergente e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

<u>SOLUZIONE</u>:
A è definita positiva se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ o se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Se $\alpha = 3$, il metodo di Jacobi converge perché A è diagonalmente dominante in senso stretto. Le iterazioni sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/6, 7/6, -1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/12, 17/12, -1/9]^T$.