Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

15 novembre 2021

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$ e si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_2$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Dire se i vettori di partenza sono linearmente indipendenti e perché.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_1$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$,

$$\|\mathbf{v}_2\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{v}_2\|_1 = 4, \quad \|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{6}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

I vettori dati sono linearmente indipendenti in quanto il procedimento di Gram-Schmidt non si è arrestato nella formazione dei tre vettori ortonormali.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Verificare l'ortogonalità di Q e determinare i valori di α e β che rendono la matrice B l'inversa di A. Fissati tali valori, calcolare $\det(A)$, $\det(Q)$, $\det(M)$, dove $M = AQ$, e la matrice M^{-1}. Determinare infine lo spettro e il raggio spettrale di Q.

Soluzione. La matrice Q è ortogonale e B è inversa di A per $\alpha = 1/4$ e $\beta = 1/2$; $\det(A) = 8$, $\det(Q) = 1$, $\det(M) = 8$, $\sigma(Q) = \{1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\}$, $\rho(Q) = 1$.

$$M^{-1} = Q^T B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}+1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y = f(x), \qquad x \in [-3, 3]\,,$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} -(2x + \pi), & -3 \le x < -\pi/2, \\ \pi \cos(x), & -\pi/2 \le x < \pi/2, \\ 2x - \pi, & \pi/2 \le x \le 3, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{24}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9a_k}{18 - k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right)$$

dove i coefficienti a_k sono dati da

$$a_k = \frac{12(-1)^k}{(k\pi)^2} + \cos\left(k\frac{\pi^2}{6}\right)\left[\frac{6\pi}{9 - k^2\pi^2} - \frac{12}{(k\pi)^2}\right].$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(3(k+1))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}}{k+1}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\cos(x+2)}{5 + \mathrm{i}(x+2)}\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-1)}}{2}\left[H(x+2) - H(x-4)\right].$$

$$F(k) = \pi e^{2\mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{5(k-1)}H(1-k) + \mathrm{e}^{5(k+1)}H(-1-k)\right],$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 3y' - 10y = \delta(x-1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = -\frac{1}{7}\begin{cases} e^{5(x-1)}, & x < 1, \\ e^{-2(x-1)}) & x \ge 1, \end{cases}$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

15 novembre 2021

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$ e si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_2$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Dire se i vettori di partenza sono linearmente indipendenti e perché.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_1$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$,

$$\|\mathbf{v}_2\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{v}_2\|_1 = 4, \quad \|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{6}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

I vettori dati sono linearmente indipendenti in quanto il procedimento di Gram-Schmidt non si è arrestato nella formazione dei tre vettori ortonormali.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -\beta & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Verificare l'ortogonalità di Q e determinare i valori di α e β che rendono la matrice B l'inversa di A. Fissati tali valori, calcolare $\det(A)$, $\det(Q)$, $\det(M)$, dove $M = AQ$, e la matrice M^{-1}. Determinare infine lo spettro e il raggio spettrale di Q.

Soluzione. La matrice Q è ortogonale e B è inversa di A per $\alpha = 2$ e $\beta = 1$; $\det(A) = 1/8$, $\det(Q) = -1$, $\det(M) = -1/8$, $\sigma(Q) = \{-1, 1, 1\}$, $\rho(Q) = 1$,

$$M^{-1} = Q^T B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y'' + y = f(x), \qquad x \in [-3, 3]\,,$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} -2(\pi + x), & -3 \le x < -\pi/2, \\ \pi \sin(x), & -\pi/2 \le x < \pi/2, \\ 2(\pi - x), & \pi/2 \le x \le 3, \end{cases}$$

e dire se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9b_k}{9 - 2k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right)$$

dove

$$b_k = \frac{4}{k\pi}(\pi - 3)(-1)^{k+1} + \frac{12}{(k\pi)^2} \sin\left(k\frac{\pi^2}{6}\right) + \frac{18}{k(9 - k^2\pi^2)} \cos\left(k\frac{\pi^2}{6}\right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(2(k-8))\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k}}{k-8}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\left(\frac{\cos{(x-3)}}{5 - \mathrm{i}(x-3)}\right)\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{8\mathrm{i}(x+2)}}{2}\left[H(x+4) - H(x)\right].$$

$$F(k) = \pi e^{-3\mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{-5(k-1)}H(k-1) + \mathrm{e}^{-5(k+1)}H(k+1)\right],$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(x+4), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ e^{-(x+4)}(1 - e^{-(x+4)}) & x \ge -4, \end{cases}$$