Tutorato ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2021/2022
Docente: Dott.ssa Silvia Frassu
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 10 del 03/01/2022
Campi vettoriali e forme differenziali

1) Dire se la seguente forma

$$\omega = (y \sin(y))\, dx + (x \sin(y) + xy \cos(y))\, dy$$

è esatta in $\mathbb{R}^2$. In tal caso, trovare una funzione potenziale per ω.

SOLUZIONE: ω è esatta in $\mathbb{R}^2$. $U(x, y) = xy \sin(y) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2) Dire se la seguente forma $\omega = x^2\, dx + x\, dy + y\, dz$ è esatta in $\mathbb{R}^3$. Inoltre, calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 0)$, $t \in [0, \pi]$.

SOLUZIONE: ω non è chiusa, quindi non è esatta. $\int_\gamma \omega = 2\pi - 16/3$

3) Data la forma differenziale

$$\omega = -\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}\, dx - \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}\, dy + \frac{1+x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2)(1+z^2)}\, dz$$

verificare che essa è chiusa nel suo dominio di definizione. È esatta nel suo dominio di definizione? È esatta in $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$? Se sì, trovare una funzione potenziale. Infine, calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [1, 2]$.

SOLUZIONE: ω è chiusa in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$. ω è esatta in A.
$U(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2+y^2} + \arctan(z) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
$\int_\gamma \omega = -1/10 + \arctan(8) - \arctan(1)$.

4) Dopo aver verificato se il campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x+y)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (y-z)\mathbf{k}$ è conservativo, calcolare $\int_\gamma \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$, dove γ è la curva di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t^2)$, $t \in [0, 2\pi]$. (Suggerimento: il campo è conservativo, quindi si può integrare lungo un'altra curva)

SOLUZIONE: $\mathbf{F}$ è conservativo. $\int_\gamma \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle = 2\pi^2 - 8\pi^4$

5) Dopo aver verificato se il campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

è conservativo, calcolare $\int_\gamma \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle$, dove γ è la curva di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$.

SOLUZIONE: $\mathbf{F}$ non è conservativo. $\int_\gamma \langle \mathbf{F}, d\mathbf{r} \rangle = -2/3$

6) Calcolare, applicando il teorema di Stokes, la circuitazione del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ lungo la curva γ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ z = xy. \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>: 0

7) Sia definito il dominio $D = A \setminus B$, dove

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -5,\ x < 4 - x^2 \right\},$$
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < \frac{1}{4} \right\}.$$

Dopo aver rappresentato graficamente D e l'orientazione positiva $\partial^+ D$, calcolare l'area del dominio utilizzando le formule di Gauss-Green.

<u>SOLUZIONE</u>: $36 - \pi/4$

8) Calcolare, applicando il teorema della divergenza, il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, y+1, yz)$ attraverso la superficie Σ di equazione cartesiana $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

<u>SOLUZIONE</u>: 48π

9) Applicando una formula di Gauss-Green, calcolare

$$\iint_D xy\, dx\, dy \qquad \text{dove } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x,\ (x-1)^2 + y^2 \le 1\}.$$

<u>SOLUZIONE</u>: $7/12$