Tutorato ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2021/2022
Docente: Dott.ssa Silvia Frassu
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 11 del 07/01/2022
Riepilogo

Prima parte del programma

1) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge puntualmente e/o uniformemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \left(\frac{1}{5n} \right) \right)^n (x-4)^n.$$

SOLUZIONE: La serie converge puntualmente in $(-1, 9)$ e converge uniformemente in $[a, b]$, con $a > -1$ e $b < 9$.

2) Dire se la seguente funzione è continua, differenziabile in $(0,0)$ e calcolare eventualmente il piano tangente

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

SOLUZIONE: La funzione è continua e differenziabile in $(0,0)$. Piano tangente $z = 1$.

3) Determinare gli estremi globali della seguente funzione

$$f(x,y) = (x-3)^2 + y^2 \ \text{ nell'insieme } \ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}.$$

SOLUZIONE: Il punto $(-1, 0)$ è di massimo assoluto. Il punto $(1, 0)$ è di minimo assoluto.

Seconda parte del programma

1) Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y,\ x \geq 0\}.$$

SOLUZIONE: $\sqrt{3} - \pi/9$

2) Calcolare la lunghezza della curva γ che ha parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [1, 2]$.

SOLUZIONE: $\frac{1}{27}\left[40^{3/2} - 13^{3/2}\right]$

3) Calcolare

$$\iint_\Sigma \frac{1}{z} d\sigma, \qquad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ 1 \le z \le 2\}$$

<u>SOLUZIONE</u>: $2\sqrt{2}\pi(2\ln(2) - 1)$

4) Dire se la seguente forma

$$\omega = \frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}\, dx + \frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2}}\, dy - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}\, dz$$

è esatta nel suo insieme di definizione. In tal caso trovare una funzione potenziale per ω. Inoltre calcolare $\int_\gamma \omega$, essendo γ la curva di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$, $t \in [0, 2\pi]$.

<u>SOLUZIONE</u>: ω è esatta in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
$U(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\int_\gamma \omega = 0$

5) Utilizzando le formule di Gauss-Green, calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla curva γ di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 2t, 5t)$, $t \in [0,3]$, e dalla retta di equazione $y = x$; rappresentare graficamente l'orientazione positiva della frontiera di tale regione di piano.

<u>SOLUZIONE</u>: 45/2

6) Calcolare, applicando il teorema di Stokes, la circuitazione del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, 2x, z+1)$ lungo la curva γ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>: π

7) Calcolare, applicando il teorema della divergenza, il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, x, z\sqrt{x^2+y^2})$ uscente dalla superficie del cilindro $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2x,\ 0 \le z \le 1\}$.

<u>SOLUZIONE</u>: 32/9