Tutorato ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2021/2022
Docente: Dott.ssa Silvia Frassu
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 12 del 28/01/2022
Riepilogo

Prima parte del programma

1) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge puntualmente e/o uniformemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \frac{n(x+1)^n}{n^2+1}.$$

SOLUZIONE: La serie converge puntualmente e uniformemente in $[-2, 0]$.

2) Dimostrare che la funzione $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ non è differenziabile nell'origine.

SOLUZIONE: $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ non esistono.

3) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}, \qquad (b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^4-y^4)}{x^2+y^2}.$$

SOLUZIONE: (a) non esiste. (b) 0.

4) Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, studiandone la natura.

SOLUZIONE: $(0, 0)$ è un punto di sella, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ sono punti di massimo relativo. $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ sono punti di minimo relativo.

5) Determinare gli estremi globali della funzione $f(x, y, z) = 5 - x - y - z$ sotto il vincolo $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

SOLUZIONE: Il punto $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ è di massimo assoluto. Il punto $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ è di minimo assoluto.

Seconda parte del programma

1) Calcolare il volume contenuto tra la semisfera superiore $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e il paraboloide $z = \sqrt{2}(x^2 + y^2)$.

SOLUZIONE: $-\frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1\right) - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

2) Sia γ la curva di parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, $t \in [0, 1]$. Calcolare

$$\int_\gamma z \, ds.$$

SOLUZIONE: $\sqrt{3} - (2/3)\sqrt{2}$

3) Calcolare

$$\iint_\Sigma \frac{\sqrt{2z+1}}{\sqrt{4+x^2+y^2}} d\sigma, \qquad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2+y^2}{4},\ x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}.$$

SOLUZIONE: $\pi\left(\sqrt{3} - 1/3\right)$.

4) Sia $\omega = x^2\,dx - y^2\,dy$ una forma differenziale. Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è il segmento che unisce i punti $A = (1,0)$ e $B = (2,1)$, percorso da A a B. Inoltre, verificare se ω è una forma esatta nel suo dominio di definizione; in tal caso, determinare una funzione potenziale U per ω.

SOLUZIONE: $\int_\gamma \omega = 2$. ω è esatta in $\mathbb{R}^2$. $U(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{y^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

5) Sia $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y, xy^2, z(x^2+y^2))$ un campo vettoriale. Verificare se il campo è conservativo. Inoltre, calcolare il flusso del campo attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$.

SOLUZIONE: $\mathbf{F}$ non è conservativo. $\iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\, d\sigma = \pi/6$

6) Sia definito il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -y^2 + 5,\ x > y - 3,\ y < 2,\ y > 0\}$. Dopo aver rappresentato graficamente D e l'orientazione positiva $\partial^+ D$, calcolare l'area del dominio utilizzando le formule di Gauss-Green.

SOLUZIONE: 34/3

7) Applicando il teorema di Stokes, calcolare il flusso del rotore del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-y, y-z, z)$ attraverso la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2,\ z \leq x+y+1\}$.

SOLUZIONE: 0

8) Calcolare, applicando il teorema di Stokes, la circuitazione del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (zx^2, zy^2, 1)$ lungo la curva che è intersezione fra le superfici $z = x+y$ e $x^2+y^2 = 1$.

SOLUZIONE: 0

9) Calcolare, applicando il teorema della divergenza, il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ uscente dalla corona sferica $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$.

SOLUZIONE: $2904\pi/5$