Tutorato ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2021/2022
Docente: Dott.ssa Silvia Frassu
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 3 del 27/10/2021

Legami tra continuità, derivabilità e differenziabilità

1) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$(a)\ \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4} \qquad (b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$$

$$(c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$$

$$(e)\ \lim_{|(x,y)|\to+\infty} \ln(x+y)+\ln(x-y) \qquad (f)\ \lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{\ln(x+y)+\ln(x-y)}{x^2+y^2}$$

$$(g)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{e}^{x^2-y^2}-1}{\arctan(x^2+y^2)} \qquad (h)\ \lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

<u>SOLUZIONE</u>:
(a) non esiste; (b) 2; (c) 0; (d) 1/2; (e) $+\infty$; (f) 0; (g) non esiste; (h) 0.

2) Stabilire se la seguente funzione è continua in $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>: non è continua in $(0,0)$.

3) Dimostrare la continuità in $(0,0)$ e la differenziabilità in $(0,0)$ delle funzioni

$$(a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad (b)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin^2(y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>: (a) e (b) sono continue in $(0,0)$ e differenziabili in $(0,0)$.

4) Determinare, se esiste, il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto $(0,0)$

$$(a)\ f(x,y) = \frac{\ln(1+x^2-y^2)}{1+x^2+y^2}, \qquad (b)\ f(x,y) = \frac{\sqrt{1+x^2-y^2}}{1+x^2+y^2}$$

<u>SOLUZIONE</u>: esiste ed ha equazione: (a) $z=0$; (b) $z=1$.

5) Stabilire in quali punti la funzione $f(x,y)=\ln\left(\sin^2(x^2+y^2)\right)$ è continua.

<u>SOLUZIONE</u>: continua per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tale che $x^2+y^2\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

6) Stabilire in quali punti la funzione $f(x,y) = e^{|x|}(y^2+1)$ è derivabile.

SOLUZIONE: derivabile parzialmente rispetto a x in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ \forall y \in \mathbb{R}\}$. Derivabile rispetto a y in $\mathbb{R}^2$.

7) Dimostrare che la funzione $f(x,y) = 1 + 2e^{\frac{y}{x}} + xy$ è differenziabile nel punto $P_0 = (1,0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in P_0.

SOLUZIONE: piano tangente $z = 3y + 3$.