Tutorato ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2021/2022

Docente: Dott.ssa Silvia Frassu

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 9 del 22/12/2021

Curve e superfici

1) Calcolare la lunghezza della catenaria che ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cosh(t) \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]$$

SOLUZIONE: $\mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

2) Calcolare la lunghezza della curva γ che ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 3(t + \sin(t)) \\ y = \frac{12}{5}(2 + \cos(t)) \\ z = \frac{9}{5}(2 + \cos(t)) \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

SOLUZIONE: $6\sqrt{2}$

3) Sia γ la cardioide parametrizzata da

$$\begin{cases} x = 2(1 + \cos(t)) \cos(t) \\ y = 2(1 + \cos(t)) \sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Verificare che la parametrizzazione è regolare tranne che per un valore di t e scrivere il versore tangente da essa indotto. Inoltre, calcolare

$$\int_\gamma y\, ds.$$

SOLUZIONE: La parametrizzazione è regolare per ogni $t \neq \pi$.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos(t)}} \left(-\sin(2t) - \sin(t), \cos(2t) + \cos(t)\right)$$

$$\int_\gamma y\, ds = 0.$$

4) Sia γ la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \ln(t) \end{cases} \qquad t \in [1, \mathrm{e}]$$

Calcolare

$$\int_\gamma x^2\, ds.$$

SOLUZIONE: $\dfrac{1}{3}\left[(\mathrm{e}^2 - 1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]$

5) Calcolare l'area del toro Σ che ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = (R + r\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ y = (R + r\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ z = r\sin(\varphi) \end{cases} \qquad \theta, \varphi \in [0, 2\pi], \quad R > r$$

<u>SOLUZIONE</u>: $4\pi^2 rR$

6) Calcolare l'area della superficie Σ di equazione cartesiana $xy = z$ che si proietta sul cerchio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

<u>SOLUZIONE</u>: $\dfrac{14\pi}{3}$

7) Sia Σ la parte di paraboloide ellittico parametrizzata da

$$\begin{cases} x = 3t\cos(\theta) \\ y = 3t\sin(\theta) \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0, 1], \; \theta \in [0, 2\pi]$$

Verificare che la parametrizzazione è regolare tranne che per un valore di t e scrivere il versore normale da essa indotto. Inoltre, calcolare

$$\iint_\Sigma z \, d\sigma.$$

<u>SOLUZIONE</u>: La parametrizzazione è regolare per ogni $t \neq 0$.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 9}} (-2t\cos(\theta), -2t\sin(\theta), 3)$$

$$\iint_\Sigma z \, d\sigma = \frac{3\pi}{10} \left[3^4 - 13^{3/2}\right].$$