Nome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
1 febbraio 2017

1. Assegnate le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix},$$

verificare che Q è ortogonale, calcolare le matrici $A = QL$, $B = LL^T$ e determinare i valori di α e β che rendono M l'inversa di L. Calcolare quindi, nel modo più efficiente, i determinanti e le inverse di A e di B.

Soluzione. $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, $\det(A) = -1$, $\det(B) = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{137}{25} & \frac{72}{25} & -\frac{24}{25} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{66}{25} & \frac{21}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & -15 \\ 6 & -15 & 46 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = MQ^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ \frac{14}{25} & 1 & -\frac{48}{25} \\ -\frac{24}{25} & 3 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = M^T M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ -3x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, e la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 1, \quad \mathbf{x} = [-1, 2, -3, 0]^T, \quad \mathbf{x}^{(\mathbf{3})} = [0, -1, 2, -1]^T.$$

3. Assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{R}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro il sistema ammette una sola soluzione e per quali valori il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta convergente. Fissato $\beta = 2$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

Soluzione. Invertibile $\forall \beta \neq \pm\sqrt{7}$. Gauss-Seidel converge per $-\sqrt{7} < \beta < \sqrt{7}$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (1/2, -3/4, 1/2)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (7/8, -3/8, 5/4)^T$.

4. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^2 - \frac{3}{x} = 0.$$

Dire se la radice è singola o multipla, giustificando la risposta, e calcolare la prima iterazione del metodo di Newton a partire da entrambi gli estremi dell'intervallo determinato. Dire qual'è l'ordine di convergenza del metodo, giustificando la risposta.

Soluzione. Radice $\alpha \in [1, 2]$. Radice semplice perché $f'(\alpha) > 0$. Iterazioni di Newton: $x_0 = 1$, $x_1 = 7/5$ e $x_0 = 2$, $x_1 = 28/19$. Newton ha ordine $p = 2$, perché la radice è semplice.

5. Determinare, utilizzando la base canonica, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	0	2
y_i	0	-1	0

e calcolare il suo valore nel punto di ascissa $x = 1$.

Soluzione.

$$p_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1, \qquad p_2(1) = -\frac{3}{4}.$$