Nome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
20 febbraio 2017

1. Siano $a = 0.01234$, $b = 0.12345$ e $c = 0.12344$. Calcolare $(a + b) - c$ e $a + (b - c)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con 4 cifre significative, e calcolare l'errore relativo delle due espressioni rispetto al risultato esatto.

   Soluzione. $(a+b)-c = 0.124 \cdot 10^{-1}$ (errore relativo $\rho = 0.004$), $a+(b-c) = 0.1244 \cdot 10^{-1}$ ($\rho = 0.007$).

2. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

   mediante l'algoritmo di Gauss con pivoting di colonna. Calcolare inoltre, utilizzando nel modo più efficiente i calcoli fatti, la seconda colonna della inversa della matrice dei coefficienti.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [0, 5, 0]^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = (1/4, 0, -1/4)^T.$$

3. Siano dati

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Dire per quali valori del parametro β la matrice A risulta non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente. Fissato $\beta = 2$, si calcolino infine le prime due iterazioni del metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

   Soluzione. Invertibile $\forall \beta \neq 0, \pm 1$, definita positiva per $\beta > 1$. Jacobi converge per $\beta > 1$ o $\beta < -1$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1/2, 1, 1/2)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 1/2, 1, 1/2)^T$. Il fatto che le iterazioni risultino uguali significa che è stata trovata la soluzione del sistema al primo passo.

4. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga una radice dell'equazione

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2x - 1 = 0.$$

Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Dire qual'è l'ordine di convergenza dei due metodi, giustificando la risposta.

Soluzione. Radice $\alpha \in [0, 1]$. Iterazioni di bisezione: $c_0 = 1/2$, $c_1 = 1/4$, $c_2 = 3/8$. Iterazioni di Newton: $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2/(\pi + 4)$. Il metodo di bisezione ha sempre ordine $p = 1$. Newton ha ordine $p = 2$, perché la radice è semplice ($f'(\alpha) > 0$).

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	0	1	2
y_i	9	6	3	6

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = -2$.

Soluzione.

$$L_0(x) = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2), \quad L_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2),$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{2}(x+1)x(x-2), \quad L_3(x) = \frac{1}{6}(x+1)x(x-1).$$

$$p_3(x) = 9L_0(x) + 6L_1(x) + 3L_2(x) + 6L_3(x), \qquad p_3(-2) = 6.$$