Nome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
6 giugno 2017

1. Determinare i valori del parametro α che rendono ortogonale la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \alpha & \alpha \\ -\alpha & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e, per uno di essi, calcolare il numero di condizione rispetto alle norme 2 e ∞ della matrice ottenuta, giustificando il procedimento utilizzato.

Soluzione. $\alpha = \pm\sqrt{2}/2$, $\kappa_2(Q) = 1$, $\kappa_\infty(Q) = (1 + \sqrt{2}/2)^2$.

2. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 19 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

mediante la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti. Calcolare inoltre, utilizzando nel modo più efficiente i calcoli fatti, la terza colonna della inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [1, 3, 2]^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_3 = (2/3, -2/3, 1/3)^T.$$

3. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale β A è invertibile, per quali risulta definita positiva e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicati al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Assegnato $\beta = 1/2$, calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

Soluzione. Invertibile $\forall\beta \neq \pm 1$, definita positiva per $-1 < \beta < 1$. Jacobi converge per $-1 < \beta < 1$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (1/4, 1, 1/4)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (1/4, 3/4, 1/4)^T$.

4. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^4 - 3x^2 = 0.$$

Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo destro dell'intervallo determinato. Dire qual'è l'ordine di convergenza dei due metodi, giustificando la risposta.

Soluzione. Radice $\alpha \in [1, 2]$. Iterazioni di bisezione: $c_0 = 3/2$, $c_1 = 7/4$, $c_2 = 13/8$. Iterazioni di Newton: $x_0 = 2$, $x_1 = 9/5$, $x_2 = 252/145$. Il metodo di bisezione ha sempre ordine $p = 1$. Newton ha ordine $p = 2$, perché la radice è semplice ($f'(\alpha) \neq 0$).

5. Costruire, utilizzando la rappresentazione di Lagrange, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	1	2	3	4
y_i	1	0	1	4

Calcolare inoltre il valore assunto dal polinomio nel punto di ascissa $x = 0$.

Soluzione.

$$L_0(x) = -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4), \quad L_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4),$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4), \quad L_3(x) = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3).$$

$$p_3(x) = L_0(x) + L_2(x) + 4L_3(x), \qquad p_3(0) = 4.$$