Nome e matricola: ....

Prova scritta di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici
20 settembre 2017

1. In un sistema in virgola mobile in base 10 con esponente compreso tra -5 e 5 e un numero di cifre significative pari a 4, si calcoli il valore $y = ax - b$ con $a = 0.2463$, $b = 2.955$ e $x = 12$. Si effettui il calcolo prima utilizzando l'arrotondamento, poi con il troncamento, valutando l'errore nei due casi e commentando i risultati ottenuti.

   Soluzione. $\mathrm{fl}(a) = 0.2463 \cdot 10^0$, $\mathrm{fl}(b) = 0.2955 \cdot 10^1$, $\mathrm{fl}(b) = 0.1200 \cdot 10^2$.
   $y_{\text{round}} = 0.1 \cdot 10^{-2}$, $y_{\text{trunc}} = 0$, $y_{\text{exact}} = 0.6 \cdot 10^{-3}$, $\rho_{\text{round}} = 0.67$, $\rho_{\text{trunc}} = 1$.

2. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

   ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (0, -6, -12, -12)^T$.

   Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/4 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 12, \quad \mathbf{x} = (1, 0, -7, -6)^T.$$

3. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   dire per quali valori del parametro reale β A è invertibile, e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Assegnato $\beta = 2$, calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0)^T$.

   Soluzione. Invertibile $\forall \beta \neq \pm\sqrt{15}$, Jacobi converge per $-\sqrt{15} < \beta < \sqrt{15}$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, -1/4)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (1/4, 3/8, 1/4)^T$.

4. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione
$$x^3 - 7x - 6 = 0.$$
Calcolare le prime due iterazioni del metodo di bisezione, a partire dall'intervallo trovato, e le prime due iterazioni del metodo di Newton, a partire dall'estremo sinistro dell'intervallo determinato ($x_0 = k$). Dire qual'è l'ordine di convergenza dei due metodi, giustificando la risposta.

   Soluzione. Radice $\alpha \in [3, 4]$. Iterazioni di bisezione: $c_0 = 7/2$, $c_1 = 13/4$, $c_2 = 25/8$. Iterazioni di Newton: $x_0 = 3$, $x_1 = 61/20 = 3.05$, $x_2 \simeq 3.0489$. Il metodo di bisezione ha sempre ordine $p = 1$. Newton ha ordine $p = 2$, perché la derivata prima $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2$ si annulla in $x = \sqrt{7/3}$, che non appartiene all'intervallo contenente la radice dell'equazione.

5. Esprimere nella forma di Lagrange il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	-6	-12	-12

   e calcolare il suo valore nel punto di ascissa $x = 3$.

   Soluzione.
$$p_3(x) = 0L_0(x) - 6L_1(x) - 12L_2(x) - 12L_3(x),$$
   con
$$L_0(x) = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2), \quad L_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2),$$
$$L_2(x) = -\frac{1}{2}(x+1)x(x-2), \quad L_3(x) = \frac{1}{6}(x+1)x(x-1);$$
   inoltre $p_3(3) = 0$.