Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

12 giugno 2024

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare la prima colonna della sua inversa, il suo determinante e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $b = [-5, -1, 7, 2]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{e}_1 = [2, -1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{x} = [1, 2, 1, -2]^T, \quad \det(A) = -3.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α il sistema ammette un'unica soluzione e per quali la matrice A é simmetrica definita positiva. Si studi, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Si fissi $\alpha = 2$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq \pm 1$, simmetrica per ogni valore di α, definita positiva per $\alpha > 1$. Il metodo di Jacobi converge per $\alpha < -1$ o $\alpha > 1$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 1/2, 1/4]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [0, 3/8, 5/16]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del second'ordine

$$\begin{cases} y''(x) = xy - \dfrac{x}{3 + y(x)y'(x)} \\ y(1) = -1, \; y'(1) = 2 \end{cases}$$

in un sistema del prim'ordine e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3/2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (-\frac{1}{8}, \frac{347}{288})^T$.

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 2y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0] \\ \pi x, & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

Dire inoltre se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine e perché.

Soluzione. La serie del termine noto non è differenziabile termine a termine perché la funzione non è continua. Inoltre, risulta

$$S_y(x) = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2 + (k\pi)^2} \sin(k\pi x) + \frac{b_k}{2 + (k\pi)^2} \cos(k\pi x),$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi k^2}((-1)^k - 1), \qquad b_k = \frac{1}{k}\left(-\frac{1}{\pi} + (-1)^k \left(\frac{1}{\pi} - 1\right)\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}}{5 - \mathrm{i}x} \sin \pi x\right\}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-2\mathrm{i}k} \frac{\sin(2k - 8)}{k - 4}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = -\pi \mathrm{i} e^{-5(k-3)}[e^{5\pi} H(k - \pi - 3) - e^{-5\pi} H(k + \pi - 3)],$$

$$f(x) = \frac{e^{4\mathrm{i}(x-2)}}{2}[H(x) - H(x - 4)].$$