

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prova scritta di Matematica Applicata

8 novembre 2024

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione  $PA = LU$ , il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_4 = -8 \\ 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = [2, 1, -1, -2]^T, \quad \det(A) = -256.$$

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale  $a$  la matrice  $A$  è invertibile, per quali è definita positiva e per quali valori il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente se applicato al sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Posto  $a = 3$ , calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, utilizzando il vettore iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ .

*Soluzione.* La matrice dei coefficienti è non singolare se  $a \neq 0, \pm\sqrt{5}$ , definita positiva per  $a > \sqrt{5}$ . Il metodo di Gauss-Seidel converge per  $a < -\sqrt{5}$  o  $a > \sqrt{5}$ . Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono  $\mathbf{x}^{(1)} = [2, 5/3, 4/3]^T$  e  $\mathbf{x}^{(2)} = [4/9, 1/3, 2/3]^T$ .

3. Considerato il seguente metodo alle differenze finite, dipendente dai parametri reali  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{2}{5}h \left[ \alpha f(x_i, \eta_i) + 2f(x_i + \frac{\alpha\beta}{3}h, \eta_i + \frac{\alpha\beta}{3}hf(x_i, \eta_i)) \right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

dire per quale valore dei parametri risulta convergente e per quali valori risulta del second'ordine.

*Soluzione.* Il metodo è convergente per  $\alpha = 1/2$  e qualsiasi  $\beta$ , è del second'ordine per  $\alpha = 1/2$  e  $\beta = 15/4$ .

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-1, 1]$

$$y'' + 2y = \sin(3x)$$

e dire se il termine noto è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.* La serie di  $\sin(3x)$  in  $[-1, 1]$  risulta essere

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi \sin(3)(-1)^k}{9 - k^2\pi^2} \sin(k\pi x)$$

e non è differenziabile termine a termine. La soluzione dell'equazione differenziale è

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi \sin(3)(-1)^k}{(9 - k^2\pi^2)(2 - k^2\pi^2)} \sin(k\pi x).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \{3xe^{-2x}H(x-3)\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin(3k-3)}{(3k-3)e^{3ik}} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$\mathcal{F} \{3xe^{-2x}H(x-3)\} = 3e^{-3(2+ik)} \frac{7+3ik}{(2+ik)^2},$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin(3k-3)}{(3k-3)e^{3ik}} \right\} = \frac{1}{6} e^{i(x-3)} [H(x) - H(x-6)].$$