

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prima prova intermedia di Matematica Applicata

12 novembre 2024

#### Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la norma  $\infty$ , norma 1 e norma 2 dei vettori assegnati. Si costruisca a partire dai vettori dati, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato l'insieme di vettori ortonormali  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ . Si consideri la matrice  $A = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$ . Cosa si può dire circa l'esistenza dell'inversa di  $A^T$ ? Motivare opportunamente la risposta.

*Soluzione.*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_1\|_\infty &= 2, & \|\mathbf{w}_1\|_1 &= 5, & \|\mathbf{w}_1\|_2 &= 3, \\ \|\mathbf{w}_2\|_\infty &= 2, & \|\mathbf{w}_2\|_1 &= 3, & \|\mathbf{w}_2\|_2 &= \sqrt{5}, \\ \|\mathbf{w}_3\|_\infty &= 2, & \|\mathbf{w}_3\|_1 &= 3, & \|\mathbf{w}_3\|_2 &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice  $A^T$  è invertibile perché le colonne di  $A$ , in quanto ortogonali, sono linearmente indipendenti, di conseguenza il rango di  $A$  è pari a 3.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1/4 & \alpha & 0 \\ -3/4 & \alpha & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \beta & 0 \\ -\beta & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

dove  $\alpha$  è un parametro reale e  $\beta$  è un reale positivo. Si determinino il valore del parametro  $\alpha$  che rende la matrice  $B$  l'inversa della matrice  $A$  e il valore del parametro  $\beta$  che rende  $C$  ortogonale. Fissati tali valori, si calcolino spettro e raggio spettrale di  $C$ . Si calcoli, infine, la matrice  $M = (A^T C)^{-1}$ , motivando la risposta.

*Soluzione.* La matrice  $B$  è l'inversa di  $A$  se  $\alpha = 1/2$ ;  $C$  è ortogonale se  $\beta = 1/2$ . Inoltre,  $\sigma(C) = \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}\right\}$ ,  $\rho(C) = 1$ . Infine,

$$M = (C)^{-1}(A^{-1})^T = C^T B^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y''(x) - y(x) = f(x), \quad x \in [-2, 2],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in [-2, -1), \\ 1, & x \in [-1, 1], \\ 1 + x & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, la serie di  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.*

$$y(x) = -\frac{7}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{2 + k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

dove i coefficienti  $a_k$  sono dati da

$$a_k = -\frac{2}{k\pi} \left[ \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} \left( \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k \right) \right].$$

La funzione  $f(x)$  non è differenziabile termine a termine non essendo continua in  $\pm 1$ .

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{2ik}}{k^2 - 4k + 8} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-2ix} \cos(x)}{x^2 + 8} \right\}$$

*Soluzione.*

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{2i(x+2) - 2|x+2|}$$

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \left[ e^{-\sqrt{8}|k+1|} + e^{-\sqrt{8}|k+3|} \right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y' + 3y = H(x + 2) - H(x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{3} \left( 1 - e^{-\frac{3}{2}(x+2)} \right) & x \in [-1, 2], \\ \frac{1}{3} \left( e^{-\frac{3}{2}(x-1)} - e^{-\frac{3}{2}(x+2)} \right) & x > 2. \end{cases}$$

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prima prova intermedia di Matematica Applicata**

12 novembre 2024

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la norma  $\infty$ , norma 1 e norma 2 dei vettori assegnati. Si costruisca a partire dai vettori dati, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato l'insieme di vettori ortonormali  $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ . Si consideri la matrice  $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$ . Cosa si può dire circa l'esistenza dell'inversa di  $Q^T$ ? Motivare opportunamente la risposta.

*Soluzione.*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_1\|_\infty &= 2, & \|\mathbf{w}_1\|_1 &= 5, & \|\mathbf{w}_1\|_2 &= 3, \\ \|\mathbf{w}_2\|_\infty &= 2, & \|\mathbf{w}_2\|_1 &= 3, & \|\mathbf{w}_2\|_2 &= \sqrt{5}, \\ \|\mathbf{w}_3\|_\infty &= 2, & \|\mathbf{w}_3\|_1 &= 3, & \|\mathbf{w}_3\|_2 &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice  $Q^T$  è invertibile perché le colonne di  $Q$ , in quanto ortogonali, sono linearmente indipendenti, di conseguenza il rango di  $Q$  è pari a 3.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1/2 & 0 \\ 3\alpha & 1/2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \beta & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

dove  $\alpha$  è un parametro reale e  $\beta$  è un reale positivo. Si determinino il valore del parametro  $\alpha$  che rende la matrice  $B$  l'inversa della matrice  $A$  e il valore del parametro  $\beta$  che rende  $C$  ortogonale. Fissati tali valori, si calcolino spettro e raggio spettrale di  $C$ . Si calcoli, infine, la matrice  $M = (AC^{-1})^T$ , motivando la risposta.

*Soluzione.* La matrice  $B$  è l'inversa di  $A$  se  $\alpha = -1/4$ ;  $C$  è ortogonale se  $\beta = \sqrt{3}/2$ . Inoltre,  $\sigma(C) = \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}\right\}$ ,  $\rho(C) = 1$ . Infine,

$$M = ((C)^{-1})^T A^T = CA^T = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} + \sqrt{3} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y(x) = f(x), \quad x \in [-2, 2],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x, & x \in [-2, -1], \\ -1, & x \in [-1, 1], \\ x - 1, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, se la serie di  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

*Soluzione.*

$$y(x) = \frac{1}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a_k}{8 + k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

dove i coefficienti  $a_k$  sono dati da

$$a_k = -\frac{2}{k\pi} \left[ \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi} \left( \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k \right) \right].$$

La funzione  $f(x)$  non è differenziabile termine a termine non essendo continua in  $\pm 1$ .

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-3ik}}{k^2 + 6k + 12} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{e^{8ix} \cos(2x)}{x^2 + 6} \right\}$$

*Soluzione.*

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{-3i(x-3) - \sqrt{3}|x-3|}$$

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{6}}{12} \left[ e^{-\sqrt{6}|k-10|} + e^{-\sqrt{6}|k-6|} \right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y' + 2y = H(x+1) - H(x-2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2}{3}(x+1)} \right) & x \in [-1, 2], \\ \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{2}{3}(x-2)} - e^{-\frac{2}{3}(x+1)} \right) & x > 2. \end{cases}$$