Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

12 novembre 2024

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 dei vettori assegnati. Si costruisca a partire dai vettori dati, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$. Si consideri la matrice $A = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$. Cosa si può dire circa l'esistenza dell'inversa di A^T? Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione.

$$\|\mathbf{w}_1\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{w}_1\|_1 = 5, \quad \|\mathbf{w}_1\|_2 = 3,$$
$$\|\mathbf{w}_2\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{w}_2\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{5},$$
$$\|\mathbf{w}_3\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{w}_3\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{5}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice A^T è invertibile perché le colonne di A, in quanto ortogonali, sono linearmente indipendenti, di conseguenza il rango di A è pari a 3.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1/4 & \alpha & 0 \\ -3/4 & \alpha & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \beta & 0 \\ -\beta & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

dove α è un parametro reale e β è un reale positivo. Si determinino il valore del parametro α che rende la matrice B l'inversa della matrice A e il valore del parametro β che rende C ortogonale. Fissati tali valori, si calcolino spettro e raggio spettrale di C. Si calcoli, infine, la matrice $M = (A^T C)^{-1}$, motivando la risposta.

Soluzione. La matrice B è l'inversa di A se $\alpha = 1/2$; C è ortogonale se $\beta = 1/2$. Inoltre, $\sigma(C) = \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\right\}$, $\rho(C) = 1$. Infine,

$$M = (C)^{-1}(A^{-1})^T = C^T B^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y''(x) - y(x) = f(x), \qquad x \in [-2, 2]\,,$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in [-2, -1), \\ 1, & x \in [-1, 1), \\ 1 + x & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = -\frac{7}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{2 + k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

dove i coefficienti a_k sono dati da

$$a_k = -\frac{2}{k\pi}\left[\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k\right)\right].$$

La funzione $f(x)$ non è differenziabile termine a termine non essendo continua in ± 1.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k}}{k^2 - 4k + 8}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{e^{-2\mathrm{i}x}\cos(x)}{x^2 + 8}\right\}$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{2\mathrm{i}(x+2) - 2|x+2|}$$

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{8}|k+1|} + \mathrm{e}^{-\sqrt{8}|k+3|}\right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y' + 3y = H(x+2) - H(x-1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{1}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x+2)}\right) & x \in [-1, 2], \\ \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x-1)} - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x+2)}\right) & x > 2. \end{cases}$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

12 novembre 2024

Compito numero 2

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 dei vettori assegnati. Si costruisca a partire dai vettori dati, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$. Si consideri la matrice $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$. Cosa si può dire circa l'esistenza dell'inversa di Q^T? Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione.

$$\|\mathbf{w}_1\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{w}_1\|_1 = 5, \quad \|\mathbf{w}_1\|_2 = 3,$$
$$\|\mathbf{w}_2\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{w}_2\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{w}_2\|_2 = \sqrt{5},$$
$$\|\mathbf{w}_3\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{w}_3\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{w}_3\|_2 = \sqrt{5}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice Q^T è invertibile perché le colonne di Q, in quanto ortogonali, sono linearmente indipendenti, di conseguenza il rango di Q è pari a 3.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1/2 & 0 \\ 3\alpha & 1/2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \beta & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

dove α è un parametro reale e β è un reale positivo. Si determinino il valore del parametro α che rende la matrice B l'inversa della matrice A e il valore del parametro β che rende C ortogonale. Fissati tali valori, si calcolino spettro e raggio spettrale di C. Si calcoli, infine, la matrice $M = (AC^{-1})^T$, motivando la risposta.

Soluzione. La matrice B è l'inversa di A se $\alpha = -1/4$; C è ortogonale se $\beta = \sqrt{3}/2$. Inoltre, $\sigma(C) = \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\right\}$, $\rho(C) = 1$. Infine,

$$M = ((C)^{-1})^T A^T = CA^T = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2}+\sqrt{3} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 2y(x) = f(x), \qquad x \in [-2, 2],$$

essendo

$$f(x) = \begin{cases} -1-x, & x \in [-2,-1), \\ -1, & x \in [-1,1), \\ x-1, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, se la serie di $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a_k}{8+k^2\pi^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right),$$

dove i coefficienti a_k sono dati da

$$a_k = -\frac{2}{k\pi}\left[\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k\right)\right].$$

La funzione $f(x)$ non è differenziabile termine a termine non essendo continua in ± 1.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}k}}{k^2+6k+12}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{e^{8\mathrm{i}x}\cos(2x)}{x^2+6}\right\}$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{-3\mathrm{i}(x-3)-\sqrt{3}|x-3|}$$

$$F(k) = \frac{\pi\sqrt{6}}{12}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{6}|k-10|} + \mathrm{e}^{-\sqrt{6}|k-6|}\right].$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y' + 2y = H(x+1) - H(x-2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(x+1)}\right) & x \in [-1, 2], \\ \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(x-2)} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(x+1)}\right) & x > 2. \end{cases}$$